Sollevamenti di azioni di gruppi e applicazioni fisiche

Roberto Catenacci
Dipartimento di Scienze Matematiche
Università di Trieste - 34127 TRIESTE

Cesare Reina
S.I.S.S.A. - Trieste

in memoria di C. Cattaneo

1 - INTRODUZIONE

Spesso è di notevole interesse studiare se l'azione di un gruppo su di uno spazio possa essere sollevata ad una azione su di un fibrato sullo spazio stesso. Esempi tipici in matematica riguardano la teoria delle rappresentazioni di gruppi su spazi di sezioni di fibrati alla Borel-Weyl-Bott, la teoria delle rappresentazioni indotte ecc.... Per quanto riguarda le applicazioni fisiche, tipici esempi sono forniti dalla teoria delle anomalie in teorie di gauge, in relatività generale, nei modelli σ su spazi omogenei e nella teoria delle stringhe.

In questo lavoro studieremo in qualche dettaglio il problema generale del sollevamento, la classificazione dei sollevamenti e qualche applicazione a problemi di interesse fisico.

Se G è un gruppo topologico che opera su di uno spazio B per omeomorfismi $\psi : B \times G \to B$, diremo che ψ si solleva su di un fibrato (E, F, B, H) di fibra F, base B e gruppo strutturale H se esiste un omeomorfismo $\psi' : E \times G \to E$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E \times G & \xrightarrow{\psi'} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ B \times G & \xrightarrow{\psi} & B \end{array}$$

sia commutativo e che, per ogni $g \in G$ l'applicazione $e \to \psi'(e, g)$ sia un morfismo di H-fibrati. In particolare, se E è un fibrato principale, ciò significa che l'azione sollevata commuta con la azione principale del gruppo strutturale: $\psi'(eh, g) = \psi'(e, g)h$.

Il concetto di sollevamento è naturale nel senso che, se una azione si solleva su di un fibrato principale, si solleva anche su ogni fibrato associato ed inoltre è compatibile con l'operazione di immagine inversa di fibrati sotto applicazioni $G-$equivarianti. Nel seguito i fibrati su B che ammettono un sollevamento della azione di G verranno detti G-fibrati.

La situazione in cui G è un sottogruppo del gruppo dei diffeomorfismi di B ed E è un fibrato di oggetti geometrici, situazione in cui il sollevamento esiste canonicamente, può trarre in inganno perchè in generale possono non esistere sollevamenti o possono esisterne molti inequivalenti . Per esempio, se P è un fibrato principale con gruppo strutturale G e avente come base G stesso, l'azione moltiplicativa di G su G si solleva se e solo se P è banale. Infatti, se $x \in \pi^{-1}(e)$, la funzione $f : G \to P$ definita da $f(g) = \psi'(x, g)$ è una sezione globale.

Lo scopo principale di questo lavoro è di studiare condizioni di esistenza di sollevamenti in casi di interesse fisico e darne una classificazione.

I risultati noti nella situazione di una generica azione su di un generico spazio si limitano a dare condizioni necessarie e sufficienti per i sollevamenti a meno di omotopie [5]. Risultati più precisi si hanno quando la azione è libera, transitiva o banale. In particolare, nel caso di azioni transitive, proveremo la seguente:

Proposizione 1-. Sia $E \to B$ un fibrato vettoriale di fibra V e gruppo di struttura K e B uno spazio omogeneo G/H. Allora la azione naturale di G su G/H si solleva se e solo se E è della forma $G \times_\alpha V$ per un omomorfismo $\alpha : H \to K$.

Nel caso di una azione libera di G su B, adattando un risultato di Atiyah [1], si ha la seguente

Proposizione 2-. I G-fibrati vettoriali su B corrispondono ai fibrati vettoriali su B/G. In particolare si ha la seguente sequenza esatta di *insiemi*:

$$0 \quad \to \quad \begin{matrix} G - fibrati \\ banali\ su\ B \end{matrix} \quad \to \quad fibrati\ su\ B/G \quad \to \quad fibrati\ su\ B$$

Il caso di fibrati in linee reali o complesse su di un fibrato principale P è particolarmente interessante per le applicazioni fisiche, essendo direttamente connesso al problema delle anomalie in teoria dei campi. Fortunatamente questa situazione è sufficientemente semplice dal punto di vista matematico da consentirci una descrizione completa sia dei fibrati in linee che accettano sollevamenti sia della classificazione dei sollevamenti inequivalenti. Infatti la sequenza della proposizione precedente diventa una sequenza di *gruppi di coomologia*. Nel caso di fibrati in linee complesse che non accettano sollevamenti, si può mostrare , almeno quando P è semplicemente connesso, che, talvolta, esiste un'estensione centrale di G che agisce sul fibrato in linee e ricopre l'azione di G su P.

2 - IL CASO DEI FIBRATI IN LINEE

In questo paragrafo studieremo il caso dei fibrati in linee su di un fibrato principale $\pi : P \rightarrow M$ di gruppo strutturale G e base M. Questa situazione è la più interessante dal punto di vista fisico; per esempio, nel caso delle teorie di gauge, P è lo spazio delle connessioni e G è il gruppo di gauge puntato, mentre nella stringa bosonica P è lo spazio delle metriche iperboliche senza isometrie su una superficie di Riemann di genere maggiore o uguale a tre, e G è il prodotto semidiretto del gruppo di Weyl e del gruppo dei diffeomorfismi. Nei modelli σ, P è lo spazio delle funzioni da uno spazio X a uno spazio omogeneo G/H e G è il gruppo delle funzioni da X a un sottogruppo K di G agente liberamente su G/H. In tutti questi casi, il problema delle anomalie è connesso con lo studio delle proprietà di trasformazione delle sezioni di fibrati in linee su P ; se l'unico sollevamento ammesso è quello banale, la teoria è priva di anomalie e la quantizzazione alla Feynman è priva di ambiguità. Rimandando a lavori precedenti [2-3-4] per uno studio più approfondito del problema delle anomalie, daremo qui i risultati matematici più significativi.

Studieremo prima il caso dei fibrati in linee complesse. All'insieme dei G-fibrati in linee su P può essere data un'interpretazione coomologica. Sia $\mathbf{C}^*(P)$ il G-modulo delle applicazioni da P a $\mathbf{C}^*$ e si consideri il primo gruppo di coomologia $H^1(G, \mathbf{C}^*(P))$; la classe $[f]$ di un cociclo f è rappresentabile con una applicazione $f : G \times P \rightarrow \mathbf{C}^*$ che soddisfa la condizione $f(p, g_1 g_2) = f(pg_1, g_2) f(p, g_1)$. A $[f]$ si può associare un fibrato in linee $L(f)$ su M identificando in $P \times \mathbf{C}$ la coppia (p, c) con $(pg, f(p, g)c)$. Ovviamente $\pi^* L(f)$ è un fibrato topologicamente banale su P. Notando che $L(f)$ è banale su M se e solo se $[f] = 1$, abbiamo subito un caso particolare della sequenza citata nella proposizione 2:

$$1 \rightarrow H^1(G, \mathbf{C}^*(P)) \rightarrow H^2(M, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^2(P, \mathbf{Z}) \qquad (*)$$

dove l'ultima applicazione è il "pull-back" in coomologia, ed i fibrati in linee complessi sono identificati con la loro classe di Chern in $H^2(M, \mathbf{Z})$. Ora, $H^1(G, \mathbf{C}^*(P)) = ker\ \pi^*$ classifica i sollevamenti: se L_1 ed L_2 sono due G-fibrati in linee su P con lo stesso grado, $L_1 \otimes L_2^{-1}$ dà un elemento di $H^1(G, \mathbf{C}^*(P))$. L'immagine di π^* è invece l'insieme dei fibrati in linee su P che ammettono almeno un sollevamento (e quindi in generale molti, classificati da $H^1(G, \mathbf{C}^*(P))$).

Lo studio del nucleo e dell'immagine di π^* si può basare sull'osservazione che la sequenza precedente deriva dalla sequenza spettrale di Leray. Assumendo per ora che P sia connesso, π può essere fattorizzato: $P \xrightarrow{g} P' = P/G_0 \rightarrow M$ dove $g : P \rightarrow P'$ è un G_0

fibrato (G_0 è la componente connessa dell'identità di G) e $h : P' \to M$ è un ricoprimento di Galois di M con gruppo $\pi_0(G)$. Corrispondentemente $ker\ \pi^*$ si spezza in una parte "globale", $ker\ h^*$ ed in una parte "locale" $ker\ g^*$:

$$1 \to ker\ h^* \to ker\ \pi^* \to ker\ g^*$$

Il risultato dello studio effettuato in [2] può essere riassunto nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} & & F & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ 0 & \to & ker\ h^* & \to & H^1(G, \mathbf{C}^*(P)) & \to & ker\ g^* = H^1(G_0, \mathbf{Z})/H^1(P, \mathbf{Z}) \\ & & \uparrow & & & & \\ & & T & & & & \end{array} \qquad (**)$$

Dove T è la parte di torsione (quando l'omologia di P' è finitamente generata) ed F la parte libera.

Quando $\pi_0(G)$ è finito (ad esempio nel caso delle teorie di Gauge), $F = 0$; quando invece $\pi_0(G)$ è perfetto (ad esempio nel caso della stringa bosonica a genere sufficientemente alto), $T = 0$.

Se P non è connesso, si possono studiare separatamente le componenti; ogni componente connessa P_i è un fibrato principale con gruppo $G_i = \{g \in G | P_i g \subseteq P_i\}$. Si ottiene allora, essendo G_0 incluso in G_i, $ker\ g^* = ker\ g_i^*$ e $ker\ h^* = \cap_i ker\ h_i^*$.

Lo studio dell'immagine di π^*, cioè la caratterizzazione dei fibrati che ammettono sollevamenti, è molto più arduo.

Nel caso particolare in cui P è semplicemente connesso e G connesso, la prima osservazione è che la sequenza esatta $(*)$ associata alla sequenza spettrale può essere proseguita come segue:

$$1 \to H^1(G, \mathbf{C}^*(P)) \to H^2(M, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^2(P, \mathbf{Z}) \xrightarrow{i} H^2(G, \mathbf{Z}) \qquad (***)$$

ed il conucleo di π^* è $H^2(G, \mathbf{Z})$.

Il significato di questa sequenza è che i fibrati in linee su P che non accettano sollevamenti (ovvero quelli in $H^2(P, \mathbf{Z})/im\ \pi^*$) corrispondono, tramite i, a classi non banali in $H^2(G, \mathbf{Z})$. Quest'ultimo gruppo di coomologia, a sua volta corrisponde alle estensioni centrali di G. In altri termini, l'ostruzione al sollevamento è un fibrato in linee su G che può essere interpretato come un'estensione $\tilde{G}$ di G per $\mathbf{C}^*$. In generale i non è suriettiva; vale infatti la seguente

Proposizione -. Se l'azione di un gruppo di Lie G connesso su di una varietà connessa e semplicemente connessa P lascia invariante una due forma ω intera (cioè $[\omega] \in H^2(P, \mathbf{Z})$), allora esiste una estensione

$$1 \to U(1) \to \tilde{G} \to G \to 1$$

canonicamente associata a (P, ω).

Per la prova, si veda ad esempio [(6)].

Il caso dei fibrati in linee reali (caso della teoria $SU(2)$ di Witten) è molto più semplice; infatti ker $\pi^* = Hom(\pi_0(G)/H, \mathbf{Z}_2)$ dove H è l'intersezione di tutti i sottogruppi di indice 2 di $\pi_0(G)$ che contengono il gruppo di isotropia delle componenti connesse di P. Se P è connesso, H può essere preso uguale a zero.

3-. AZIONI TRANSITIVE

In questo paragrafo mostreremo la proposizione 1 che caratterizza completamente il caso delle azioni transitive. Quando G opera transitivamente su uno spazio X, è noto che X è della forma G/H con H sottogruppo chiuso di G.

Proposizione 1-. Sia $E \to B$ un fibrato vettoriale di fibra V e gruppo di struttura K e B uno spazio omogeneo G/H. Allora la azione naturale di G su G/H si solleva se e solo se E è della forma $G \times_\alpha V$ per un omomorfismo $\alpha : H \to K$.

La dimostrazione, molto semplice, consiste nel costruire α. Denotiamo con P il fibrato principale associato a E. Indicando con K_0 la fibra sopra eH incluso in G/H e con ψ' il sollevamento dell'azione di G, $\psi'(h) : K_0 \to K_0$ per ogni $h \in H$. Cosìse p_0 è un punto di K_0, c'è una funzione $\alpha : H \to K$ definita da $p_0\alpha(h) = \psi'(h)(p_0)$. Siccome $\psi'(h_2) \circ \psi'(h_1) = \psi'(h_2h_1)$, si ottiene subito che $\psi'(h_2)(p_0\alpha(h_1)) = p_0\alpha(h_2)\alpha(h_1) = \psi'(h_2h_1)(p_0) = p_0\alpha(h_2h_1)$. Essendo l'azione libera questo implica che α è un omomorfismo. Usando tale omomorfismo, si costruisce il fibrato principale associato $G \times_\alpha K$. Consideriamo ora la applicazione $l : G \times_\alpha K \to P$ data da $l[g,k] = \psi'(g)(p_0)k$; l è ben definita perchè $l[gh, \alpha(h^{-1})k] = \psi'(gh)(p_0)\alpha(h^{-1})k = \psi'(g)(\psi'(h))(p_0))\alpha(h^{-1})k = \psi'(g)(p_0\alpha(h))\alpha(h^{-1})k = l[g,k]$. Dunque l è un morfismo di fibrati principali: $l([g,k]k') = (l[g,k])k'$ e, chiaramente, è un isomorfismo. La tesi segue passando dai fibrati principali ai vettoriali associati.

Da questa proposizione si vede anche che i sollevamenti, quando esistono, sono classificati dagli omomorfismi di H in K.

4 - APPLICAZIONI ALLE ANOMALIE IN TEORIA DEI CAMPI

Riportiamo per omogeneizzare la notazione alcuni esempi già trattati in lavori precedenti. La situazione generale è la seguente: si studia la quantizzazione di un campo ϕ interagente con un potenziale non dinamico esterno a in modo che l'azione classica è un funzionale $S = S(\phi; a)$ su di un opportuno spazio di campi $\Phi \times A$. Il funzionale di vuoto

$$W(a) = \int_{\Phi} d\phi e^{-S(\phi,a)}$$

opportunamente regolarizzato è un funzionale sullo spazio A. Supponendo che l'azione classica sia invariante sotto l'azione di un gruppo di simmetrie G, ovvero che

$$S(\phi.g; a.g) = S(\phi; a)$$

$\forall g \in G$, può accadere che il procedimento di regolarizzazione non mantenga tale invarianza e si abbia che $W(a.g) \neq W(a)$. Negli esempi di interesse fisico accade che $f(g, a) = W(a.g)/W(a)$ definisce una classe di coomologia in $H^1(G, \mathbf{C}^*(A))$; se tale classe non è banale siamo in presenza di una anomalia topologica. Risulta dunque evidente che le anomalie sono connesse all'innalzamento dell'azione di G su fibrati in linee complesse banali su A. In questa descrizione abbiamo assunto che W sia un funzionale a valori complessi, come accade sempre se ϕ è un campo chirale. La stessa ambientazione vale anche nel caso reale, pur di sostituire $\mathbf{C}^*(A)$ con $\mathbf{R}^*(A)$.

E' tuttavia noto che in teoria dei campi si presentano anomalie non cancellabili se si lavora con funzionali "locali" (nel senso di integrali di lagrangiane che dipendono polinomialmente dai campi e dalle loro derivate) che sono invece banali topologicamente. Sicchè la presenza di anomalie topologiche è una condizione sufficiente perchè una teoria sia anomala in senso fisico. E' tutt'ora un problema di grande interesse capire in quali casi sia vero anche l'inverso.

Per chiarezza osserviamo che purtroppo vi sono due accezioni di località per quanto riguarda le anomalie. Per distinguerle, chiameremo locale una anomalia derivante da un innalzamento non banale del gruppo locale G_0, mentre riserveremo "locale" per indicare località nel senso della teoria dei campi.

Esempio 4.1: Anomalie nella stringa bosonica. Nel caso della teoria della stringa bosonica, siamo interessati al seguente fibrato principale:

$$
\begin{tikzcd}
C_g^0 \arrow[d, "G"] \arrow[dr, "G_0"'] & \\
 & T_g^0 \\
M_g^0 \arrow[ur, "\Gamma"] &
\end{tikzcd}
$$

ove

C_g^0 è lo spazio delle strutture conformi senza automorfismi su di una superficie S liscia, chiusa ed orientata di genere $g \geq 3$

$G = Diff_g$ è il gruppo dei diffeomorfismi di S che preservano l'orientazione;

$G_0 = Diff_g^0$ è la componente dell'identità di $Diff_g$;

$\Gamma = Diff_g/Diff_g^0$ è il cosiddetto "mapping class group";

$T_g^0 = C_g^0/Diff_g^0$ è un aperto denso nello spazio di Teichmuller;

$M_g^0 = C_g^0/Diff_g$ è lo spazio dei moduli delle curve senza automorfismi.

Qui possiamo applicare la sequenza (**) con $P = C_g^0$ e $P' = T_g^0$. Si ha che $H^1(P, \mathbf{Z}) = H^2(P', \mathbf{Z}) = 0$, inoltre $Diff_g^0$ è contraibile e Γ è perfetto (per $g \geq 3$). Da ciò abbiamo che $ker\ g^* = 0, T = 0$, $ker\ h^* = H^1(Diff_g, \mathbf{C}^*(C_g^0))$ e possiamo quindi concludere che nella stringa bosonica

1 - le anomalie topologiche sono di natura globale ma non di torsione

2 - non vi sono anomalie topologiche di natura locale (ovvero dovute all'innalzamento dell'azione di $Diff_g^0$).

E' interessante a questo proposito osservare che a livello dei funzionali "locali" si trovano anomalie associate all'innalzamento di $Diff_g^0$ (assenti topologicamente) che corrispondono in qualche modo alle anomalie globali di cui al punto 1. Questo fenomeno può essere dovuto al fatto che, nelle stringhe, $ker\ h^*$ è libero (in particolare è il gruppo dei line-bundles su M_g^0), ma una spiegazione completa richiede ulteriori approfondimenti.

Esempio 4.2 - Anomalie in teorie di gauge: Nelle teorie di gauge il fibrato rilevante è

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "G"] \\
O
\end{tikzcd}
$$

ove

A è lo spazio delle connessioni $SU(n)$ su di un fibrato vettoriale $E \to S^4$.

$G = Map_0(S^4, SU(n))$ è il gruppo delle trasformazioni di gauge "puntate"

$O = A/G$ è lo spazio delle orbite di gauge

In questo caso, per $n \geq 3$ si ha che $\pi_0(G) = \pi_4(SU(n)) = 0$, e non vi sono anomalie globali perchè G è connesso. Quindi, le anomalie topologiche sono di natura locale. Notiamo che le anomalie globali sono assenti in questo caso perchè come varietà di base abbiamo preso S^4. In situazione più generale, prendendo come varietà di base X, si ha che $G = Map_0(X, SU(n))$ e quindi $\pi_0(G) = H^3(M, \mathbf{Z})$. Se quest'ultimo gruppo è finito, tutte le anomalie globali sarebbero di torsione. Ritroviamo che per S^4 esse sono assenti. Per quanto riguarda le anomalie topologiche locali, esse stanno in $H^1(G_0, \mathbf{Z}) = H^2(A/G_0, \mathbf{Z})$.

Ringraziamenti. Ringraziamo G.P.Pirola, G.Falqui e M.Martellini per la collaborazione in precedenti lavori, di cui il presente è un' espansione. C.R. è anche grato a R.Stora per numerose discussioni sull'argomento. Ringraziamo infine la direzione dei *Rendiconti di Matematica* per aver accettato questo lavoro anche se in ritardo sulla scadenza convenuta.

Bibliografia

1) M.Atiyah *K theory.* W.A.Benjamin, New York 1967.
2) R.Catenacci e G.P.Pirola *A geometrical description of local and global anomalies.* Lett. Math. Phys. **19**,- (1990) (in stampa)
3) R. Catenacci, G.P. Pirola, M. Martellini, C. Reina *Group actions and anomalies in gauge theories* Phys.Lett. **B172**,223 (1986)
4) G.Falqui e C.Reina *BRS cohomology and topological anomalies.* Commun.Math.Phys. **102**,503 (1985)
5) D.H.Gottlieb *Lifting actions in fibrations* in: Geometric applications of homotopy theory, Lecture notes in Mathematics. Vol 657, Springer,1978.
6) A.Pressley, G.Segal *Loop groups.* Claredon Press, Oxford (1986)

Trieste 18 dic. 1989