Yang-Mills, teorie di: aspetti geometrici MCQ Alcuni aspetti sia classici che quantistici delle teorie di Y.M. (o teorie di gauge (V.)) sono di natura geometrica e trovano la loro naturale ambientazione nella teoria delle connessioni su fibrati vettoriali (V.)

Indice: 0. Introduzione 1. Spazio dei potenziali di gauge. 2. L'azione di Y.M. 3. Il gruppo delle trasformazioni di gauge e lo spazio delle orbite. 4. Istantoni e teorema di Donaldson. 5. Aspetti quantistici delle teorie di Y.M. BIBLIOGRAFIA

0. Introduzione

Introdotte in fisica nel 1953, le teorie di Y.M. sono un esempio di un fenomeno ricorrente: la stessa struttura appare allo stesso tempo e con motivazioni indipendenti sia nella fisica fondamentale che in matematica. Questa coincidenza, riconosciuta a partire dagli anni '70, ha reso disponibile una notevole messe di risultati matematici per la comprensione della struttura delle teorie di Y.M.. Ma ha anche prodotto nuove linee di ricerca in matematica con risultati fondamentali iniziati con il teorema di Donaldson (1983): il primo esempio di topologia differenziale non lineare.

Nello studio delle teorie di Y.M. a livello quantistico è utile eseguire la rotazione di Wick e lavorare sulla versione Euclidea dello spazio-tempo. Condizioni asintotiche o di periodicitá sui campi della teoria conducono naturalmente a compattificare lo spazio tempo euclideo e a lavorare quindi su di una varietá Riemanniana M compatta (ad es. la sfera S^4 o il toro T^4). I campi (classici) di materia si identificano allora con sezioni di fibrati vettoriali $E \to M$ (V. fibrati, applicazioni) con gruppo di struttura $G \subset Gl(N, \mathbf{C})$. E puó essere pensato come una collezione di prodotti (*banalizzazioni locali*) $E|_{U_\alpha} = U_\alpha \times \mathbf{C}^N$, con $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di M, identificati mediante *funzioni di transizione* $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ nel modo seguente: $U_\alpha \times \mathbf{C}^N \ni (x, v) \simeq (y, w) \in U_\beta \times \mathbf{C}^N$ se e solo se $x = y$ in M e $v = g_{\alpha\beta} w$ in $\mathbf{C}^N$. Una *sezione* $\sigma = \{f_\alpha\}$ di E è una collezione di funzioni vettoriali (multipletti) $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{C}^N$ tali che $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$. Ovviamente su $\mathbf{R}^n$ è sufficiente un sola carta. E è liscio se le sue funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ sono C^∞ e σ è liscia se le funzioni locali f_α sono C^∞. Denoteremo con $\Omega^0_\infty(E)$ lo spazio lineare infinito dimensionale delle sezioni lisce di E e con $\Omega^p_\infty(E)$ lo spazio delle p-forme lisce a valori in E, ovvero delle sezioni lisce del fibrato $E \otimes \wedge^p T^* M$, ove $T^* M$ è il fibrato cotangente di M e $\wedge^p$ il p-esimo prodotto esterno.

1. Spazio dei potenziali di gauge.

Per estendere il calcolo differenziale a sezioni di fibrati, è necessario generalizzare il differenziale d. Siccome $df_\alpha = d(g_{\alpha\beta} f_\beta) = g_{\alpha\beta} df_\beta + dg_{\alpha\beta} f_\beta$, d non manda 0-forme a valori in E in 1-forme a valori in E. Una *connessione* (differenziale covariante) è un operatore differenziale del primo ordine d_A: $\Omega^0_\infty(E) \to \Omega^1_\infty(E)$. Localmente, cioè su U_α, il differenziale covariante prende la forma $d_A|_\alpha = d + A_\alpha$ dove $A_\alpha : U_\alpha \to T^*(U_\alpha) \otimes LieG$ e $LieG$ è l'algebra di Lie del gruppo G. Sicchè una connessione puó essere pensata come una collezione $A = \{A_\alpha\}$ di uno-forme a valori in $LieG$ tali che $(d + A_\alpha) f_\alpha = g_{\alpha\beta}(d + A_\beta) f_\beta$. Ne segue che $A_\beta = g^{-1}_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} + g^{-1}_{\alpha\beta} A_\alpha g_{\alpha\beta}$. In sostanza A_α si trasforma come un potenziale di gauge (V. gauge, teorie di). Se E ha una metrica $(\ , \ )$, cioè il gruppo G è $U(N)$, si richiede $d(\sigma, \tau) = (d_A \sigma, \tau) + (\sigma, d_A \tau)$. Se inoltre il gruppo è $SU(N)$, per N sezioni locali σ_i, si richiede: $d_A(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge ... \wedge \sigma_N) = 0$.

Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme delle connessioni su E e con $EndE$ il fibrato con fibra $LieG$ e funzioni di transizione date dall'azione aggiunta di $g_{\alpha\beta}$. Dalle proprietá di trasformazione di A_α per cambio di carta locale, segue che la differenza di due connessioni $A - A_0$ appartiene allo spazio vettoriale $\Omega^1(EndE)$: $\mathcal{A}$ è quindi uno spazio affine.

Per rendere matematicamente fondata la teoria è utile lavorare su opportuni spazi di Sobolev, ottenuti completando spazi di sezioni C^∞ come $\Omega^p_\infty(EndE)$ rispetto alla norma $\|\sigma\|^2_s = \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_{|I|\leq s} |D^I f_\alpha|^2$, ove $\sigma = \{f_\alpha\}$, ρ_α è una partizione dell'unitá subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha\}$, $I = i_1, i_2, ..., i_h$ è un multi-indice di lunghezza $|I| = h$ e $D^I = \partial^h/\partial x^{i_1}...\partial x^{i_h}$. Indicheremo con $\Omega^p_s(EndE)$ tale completamento: si tratta di uno spazio di sezioni a quadrato sommabili insieme alle derivate fino all'ordine s. E' ovviamente uno spazio di Hilbert in cui, sebbene il prodotto interno dipenda dalla scelta di U_α, ρ_α e dalla banalizzazione locale di E, norme ottenute con scelte diverse inducono topologie equivalenti. Ricordiamo due proprietá importanti. Sia H_s un generico spazio di Sobolev:
1) per $s > n/2 + r$ ($n = dimM$) si ha un'inclusione compatta $H_s \subset C^r$. In particolare per $s > n/2$ gli elementi di H_s sono funzioni continue ed H_s è un'algebra moltiplicativa;
2) un operatore differenziale D di ordine d estende ad una applicazione liscia $D : H_s \rightarrow H_{s-d}$.

Completandone il modello in norma di Sobolev s, lo spazio affine delle connessioni diviene una varietá di Hilbert $\mathcal{A}_s$ modellata su $\Omega^1_s(EndE)$

2. Il funzionale di Yang-Mills

Il differenziale covariante d_A puó essere esteso agli spazi $\Omega^p_\infty(E)$ mediante la regola di Leibnitz: $d_A(\sigma\otimes\theta) = d_A\sigma\wedge\theta + \sigma\otimes d\theta$ per $\sigma \in C^\infty(E)$ e $\theta \in \Omega^p$. La *curvatura* (campo di gauge) di d_A, definita da $d^2_A : \Omega^0(E) \rightarrow \Omega^2(E)$, è un operatore di ordine zero, cioè è la moltiplicazione per un elemento $F(A)$ di $\Omega^2(EndE)$. Esso soddisfa l'identitá di Bianchi $d_A F(A) = 0$. Localmente, si ha $F_\alpha = dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha$ ed F_α è una due-forma a valori in $LieG$. L'applicazione $F = F(A)$ estende per continuitá ad una funzione quadratica $F : \mathcal{A}_s \rightarrow \Omega^2_{s-1}(EndE)$ liscia per $s \geq 1$ (e $dimM = 4$).

Se M è n-dimensionale, orientata e riemanniana con metrica (,) ed elemento di volume dV, l'operatore di dualitá di Hodge è un'applicazione $* : \Omega^p \rightarrow \Omega^{n-p}$ definito da $\theta \wedge *\sigma = (\theta, \sigma)dV$. Per $n = 4$, $* : \Omega^2 \rightarrow \Omega^2$ è idempotente e quindi decompone Ω^2 nella somma diretta degli autospazi corrispondenti agli autovalori 1 e -1. Tale decomposizione si estende a $\Omega^2(E)$ per ogni fibrato E. In particolare la curvatura F si spezza in $F_+ + F_-$ dette rispettivamente parte autoduale ed anti autoduale.

Se E è un fibrato complesso con una connessione d_A e curvatura F, la classe di coomologia di deRham $c(E) = [det(1 + \frac{i}{2\pi}F)] \in H^*_{DR}(M)$ è detta classe di Chern reale totale. Per un fibrato in linee L, $c(L) = [1 + \frac{i}{2\pi}F]$ e $c_1(L) = [\frac{i}{2\pi}F]$ classifica topologicamente tali fibrati, quando M è semplicemente connessa. Se E è un fibrato $SU(2)$, F ha valori in $su(2)$ e $trF = 0$. Si ottiene $c_1(E) = 0$ e $c_2(E) = [\frac{1}{8\pi^2}tr(F \wedge F)]$. Su una 4-varietá compatta, la classe c_2 classifica topologicamente i fibrati $SU(2)$. Integrando $-c_2$ su M, si ottiene un intero k detto *carica topologica*.

Veniamo ore al *funzionale di Yang-Mills*. Assumendo per semplicitá che $G = SU(N)$, abbiamo un prodotto scalare $(X,Y) = -trXY$ nell'algebra di Lie $su(N)$. Con la metrica di M possiamo definire il funzionale $S : \mathcal{A}_s \to \mathbf{R}$ dato da

$$S(A) = -\int_M trF(A) \wedge *F(A).$$

Osservando che $S(A)$ è il quadrato della norma della curvatura di d_A in $\Omega^2_0(EndE)$, si ha che S è un funzionale C^∞ su $\mathcal{A}_s$ per $s \geq 1$ e $dimM = 4$, come assumeremo d'ora in poi. Identificando lo spazio tangente $T_A\mathcal{A}_s$ con $\Omega^1_s(EndE)$, il differenziale di S in A è

$$dS(A;\eta) =< d_A^* F(A), \eta >=: -\int_M tr d_A^* F(A) \wedge *\eta$$

e l'Hessiano è

$$H_S(A;\eta) =< d_A^* d_A \eta + *[*F(A), \eta], \eta >$$

per ogni η in $T_A\mathcal{A}$, ove d_A^* è l'aggiunto formale di d_A e $[\ ,\ ]$ è il commutatore indotto dal commutatore in $LieG$ e dal prodotto esterno di forme differenziali.

La variazione prima dá le equazioni di Yang-Mills $d_A^* F(A) = 0$. Notiamo che $d_A F(A) = 0$ sono sempre soddisfatte (identitá di Bianchi). Spezzando la curvatura $F = F_+ + F_-$ otteniamo $S(A) = \int_M (F_+, F_+) + (F_-, F_-)$, mentre la carica topologica è data da $8\pi^2 k = \int_M (F_+, F_+) - (F_-, F_-)$. Se k è positivo si ha $S \geq 8\pi^2 k$ mentre, se k è negativo, $S \geq -8\pi^2 k$. L'uguaglianza si ha, rispettivamente, per $F_- = 0$ e $F_+ = 0$ e S ha allora un minimo locale. Inoltre, in questi casi, $d_A F(A) = 0$ implica $d_A^* F(A) = 0$. Quando è raggiunto il limite dettato dalla topologia, le equazioni di Yang-Mills si riducono a equazioni del primo ordine: $F = \pm * F$ e le loro soluzioni (se esistono) sono dette *istantoni* o *antistantoni*.

3. Il gruppo delle trasformazioni di gauge e lo spazio delle orbite.

Una *trasformazione di gauge* è una sezione del fibrato $AutE$, ovvero una sezione invertibile di $EndE$. In termini locali è una famiglia $g = \{g_\alpha\}$ di applicazioni $g_\alpha : U_\alpha \to G$ tali che $g_\alpha = g^{-1}_{\alpha\beta} g_\beta g_{\alpha\beta}$. Il gruppo delle trasformazioni di gauge $\mathcal{G} = C^\infty(AutE)$ è un gruppo di Lie infinito dimensionale per moltiplicazione puntuale $(g_\alpha g'_\alpha)(x) = g_\alpha(x) g'_\alpha(x)$. La sua algebra di Lie è $\Omega^0_\infty(EndE)$. Esso ha un centro Z dato dalle trasformazioni di gauge g_α a valori nel centro di G; per $G = SU(2)$, $\mathbf{Z}_2$ è anche il centro di $\mathcal{G}$. È possibile dare a $\mathcal{G}$ una struttura di varietá di Hilbert completandone l'algebra di Lie in $\Omega^0_s(EndE)$. Per $s > 2$ (e $dimM = 4$) si ottiene allora un gruppo di Hilbert-Lie.

Una trasformazione di gauge $g \in \mathcal{G}$ agisce sullo spazio delle connessioni $\mathcal{A}$ nel modo seguente: $A \to A^g = A + g^{-1} d_A g$ o, in termini locali, $A^g_\alpha = g^{-1}_\alpha dg_\alpha + g^{-1}_\alpha A_\alpha g_\alpha$. Questa azione si estende ad una azione liscia $\mathcal{G}_{s+1} \times \mathcal{A}_s \to \mathcal{A}_s$ per $s > 1$.

Essendo invariante per trasformazioni di gauge, il funzionale di Yang-Mills S è in realtá definito sullo spazio quoziente $\mathcal{O}_s = \mathcal{A}_s / \mathcal{G}_{s+1}$, detto *spazio delle orbite di gauge* (d'ora in poi gli indici di Sobolev verranno omessi). Si tratta di uno spazio topologico (con la topologia quoziente), ma non di una varietá liscia perchè l'azione di $\mathcal{G}$ non è libera: infatti vi sono punti fissi dati dalle connessioni riducibili. Ricordiamo che un fibrato E è *riducibile* se si puó decomporre nella somma diretta $E = E_1 \oplus E_2$ di due sottofibrati; in altre parole se le funzioni di transizione si possono scrivere in forma diagonale a blocchi. Una connessione su un fibrato riducibile E è *riducibile* se si puó scrivere come somma diretta di due connessioni su E_1 ed E_2. In particolare un fibrato $SU(2)$ è riducibile se si presenta come somma diretta di due fibrati in linee $L \oplus L^*$. Se $dimM = 4$, una condizione necessaria e sufficiente per la riducibilitá è che $k = \omega(c_1(L), c_1(L))$ dove ω è la forma di intersezione di M (V. 4).

Vi sono due modi standard di ovviare al problema dei punti fissi:
1) restringersi all'azione su $\mathcal{A}$ del gruppo $\mathcal{G}^0$ delle trasformazioni di gauge *puntate*, ovvero tali che $g(x_0) = id$ per un punto fissato $x_0 \in M$. Osserviamo che $\mathcal{G}/\mathcal{G}^0 = G$;
2) restringersi all'azione del gruppo $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/Z$ (delle trasformazioni di gauge modulo il centro) sullo spazio delle connessioni *irriducibili* $\bar{\mathcal{A}}$. Quest'ultimo è un aperto denso in $\mathcal{A}$ e contraibile.
In entrambi i casi l'azione risulta libera. Qui ci metteremo nel caso 2.

Per dare una struttura di Hilbert sullo spazio delle orbite si lavora localmente. In ogni punto $A_0 \in \bar{\mathcal{A}}$, si ha un sottospazio distinto $imd_{A_0} \subset T_{A_0}\bar{\mathcal{A}}$ (con $d_{A_0} : \Omega^0(EndE) \to \Omega^1(EndE)$) dato dalle trasformazioni di gauge infinitesime di A_0; si tratta dello spazio tangente all'orbita $A_0\bar{\mathcal{G}}$ di $\bar{\mathcal{G}}$ per A_0. Il suo complemento ortogonale $kerd^*_{A_0}$ risulta essere il modello locale per $\bar{\mathcal{O}}$, nel senso che c'è un diffoemorfismo tra una bolla B_{A_0} abbastanza piccola in $kerd^*_{A_0}$ ed un intorno dell'orbita $A_0\bar{\mathcal{G}}$ in $\bar{\mathcal{O}}$ (v. fig. 1). Risultati analoghi si hanno nel caso 1. Le proiezioni $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{G}^0 = \mathcal{O}^0$ e $\bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}/\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{O}}$ sono fibrati principali. Poichè gli spazi totali $\mathcal{A}$ e $\bar{\mathcal{A}}$ sono contraibili, la topologia degli spazi delle orbite non puó essere banale quando quella del gruppo $\mathcal{G}^0$ o $\bar{\mathcal{G}}$ non lo è. Ció avviene ad esempio per $G = SU(n)$ quando $M = S^4$ o T^4. In questi casi, i fibrati delle orbite di gauge non sono banali come fibrati principali e dunque non esistono sezioni continue globali. In termini fisici ció significa che non è possibile fissare la gauge globalmente: una patologia nota come *ambiguitá di Gribov*.

Le soluzioni classiche delle equazioni di Y.M. (modulo trasformazioni di gauge) si presentano in famiglie che sono sottospazi di $\mathcal{O}$. In particolare gli spazi $\mathcal{M}^k_G$ delle soluzioni autoduali di carica topologica k e gruppo G (mod $\mathcal{G}$) sono detti *spazi dei moduli* degli istantoni. In generale $\mathcal{M}^k_G$ è di dimensione finita ed ha singolaritá corrispondenti alle connessioni riducibili.

4. Istantoni

Lo studio dello spazio dei moduli ${\mathcal{M}^1}_{SU(2)}$ degli 1-istantoni autoduali $SU(2)$ (mod $\mathcal{G}$) ha trovato una importante applicazione nel campo della topologia delle varietá quadridimensionali.

Una 4-varietá differenziabile, compatta, semplicemente connessa M è anche orientabile. La sua forma di intersezione $\omega : H^2_{DR}(M) \times H^2_{DR}(M) \to \mathbf{R}$, definita da $\omega(a, b) = \int_M a \wedge b$, è simmetrica, bilineare, unimodulare ($det(\omega) = \pm 1$) e, ristretta alle classi di forme intere, ha valori interi; ω è detta *pari* se gli elementi sulla diagonale sono numeri pari. La forma di intersezione puó essere definita, piú in generale, anche quando M è solo una varietá topologica. Per 4-varietá compatte e semplicemente connesse, ω risulta a valori interi ed è l'invariante basilare di tali varietá. Un teorema di Freedman asserisce infatti che, data una forma quadratica ω con le proprietá sopra citate, c'è una 4-varietá $M = |\omega|$ che realizza ω come forma di intersezione. Inoltre, se ω è pari, la varietá è unica (a meno di omeomorfismi), altrimenti ce ne sono esattamente due.

Se M ha una struttura differenziabile, su di essa è possibile studiare teorie di Y.M. ed in particolare esiste lo spazio di moduli $\mathcal{M}^1_{SU(2)}$. Da argomenti di cobordismo (vedi oltre) segue il teorema di Donaldson : se $|\omega|$ è una varietá liscia con forma d'intersezione definita positiva, allora ω è diagonalizzabile su $\mathbf{Z}$ con autovalori tutti uguali a 1 (ω è sempre diagonalizzabile su $\mathbf{R}$).

Combinando i risultati di Freedman e di Donaldson è possibile costruire varietá topologiche che non ammettono strutture differenziabili e, da queste, dimostrare che $\mathbf{R}^4$ ha piú di una struttura differenziabile (in realtá una infinitá non numerabile). In particolare, la varietá topologica $|E_8 \oplus E_8|$ (ove E_8 è la forma di Cartan del gruppo E_8) non ammette struttura differenziabile, mentre c'è una varietá differenziabile (una ipersuperficie quartica in $\mathbf{C}P^3$) che ha $-E_8 \oplus -E_8 \oplus 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ come forma di intersezione. Essendo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la forma di intersezione di $S^2 \times S^2$, si potrebbe pensare di rendere liscia la varietá topologica $|E_8 \oplus E_8|$, rimuovendo 3 copie di $S^2 \times S^2$, e rovesciando l'orientazione. Poichè ció non è possibile, una certa sottovarietá $V \subset 3(S^2 \times S^2)$ liscia ed omeomorfa ad $\mathbf{R}^4$, che si presenta naturalmente durante la costruzione, non puó essere anche diffeomorfa a $\mathbf{R}^4$. In particolare, nella struttura differenziabile di V le 3-sfere $\sum_{i=1}^4 (x^i)^2 = r^2$ non sono lisce per r grande. Tale risultato è sorprendente (tutti gli $\mathbf{R}^n$ per $n \neq 4$ hanno una sola struttura differenziabile) e le sue conseguenze fisiche non sono ancora state esplorate.

Per discutere la struttura degli spazi $\mathcal{M}^1_{SU(2)}$ iniziamo dal caso piú semplice in cui M è S^4. In notazione quaternionica, $SU(2) = Sp(1)$ è il gruppo dei quaternioni di norma 1, mentre la sfera S^4 è lo spazio proiettivo quaternionico $\mathbf{H}P^1$. Identificando $\mathbf{H}^2$ con $\mathbf{R}^8$, la parte reale del prodotto hermitiano di $\mathbf{H}^2$ diventa l'usuale prodotto scalare in $\mathbf{R}^8$. I vettori di $\mathbf{R}^8$ di norma uno formano la sfera S^7. La proiezione naturale $S^7 \to S^7/SU(2) = S^4$ è un fibrato principale in cui $SU(2)$ opera su S^7 per moltiplicazione a sinistra del coniugato. Il fibrato vettoriale E_{S^4} ad esso associato ha $k = 1$.

Una connessione autoduale su E_{S^4} (*istantone fondamentale*) è data localmente (cioè su $E_{S^4}|_{R^4}$) da:

$$A = \frac{1}{2}\frac{\bar{x}dx - xd\bar{x}}{1 + |x|^2}$$

ed ha curvatura

$$F = \frac{d\bar{x} \wedge dx}{(1 + |x|^2)^2}.$$

Il gruppo $Sp(2)$ opera per isometrie su S^7 , preserva la connessione sopra descritta e si proietta sulla azione usuale di $SO(5)$ su S^4. L'invarianza conforme delle equazioni autoduali mostra che il doppio ricoprimento $SL(2, \mathbf{H})$ del gruppo conforme $SO(5, 1)$ di S^4 trasforma soluzioni in soluzioni. Si puó mostrare che *tutti* gli 1-istantoni su S^4 si ottengono in questo modo. Lo spazio dei moduli è quindi la bolla iperbolica $B^5 = SL(2, \mathbf{H})/Sp(2) = SO(5, 1)/SO(5)$. Le trasformazioni conformi $T_{\lambda,b}(x) = \lambda(x-b)$ per λ reale positivo e $b \in S^4$ parametrizzano lo spazio dei moduli (se si identificano $T_{\lambda,b}$ e T_{λ^{-1},b^*}, dove b^* è il punto antipodale di b). I parametri b e λ sono detti, rispettivamente, *centro* e *scala* dell'istantone ottenuto mediante l'applicazione di $T_{\lambda,b}$ all'istantone fondamentale. Si vede facilmente dalle formule che la curvatura si concentra in $x = b$ per

$\lambda \to 0$. Da queste osservazioni si ottiene una chiara descrizione dello spazio dei moduli su S^4: il centro della bolla unitaria B^5 è l'istantone fondamentale, mentre i punti posti a distanza r lungo il raggio che unisce il centro al punto b del bordo S^4 di B^5 rappresentano gli istantoni ottenuti applicando $T_{1-r,b}$. La varietá S^4 si presenta allora come bordo dello spazio dei moduli ed i suoi punti rappresentano gli istantoni la cui curvatura è concentrata in un punto.

Questa descrizione dello spazio delle soluzioni su S^4 mantiene le sue proprietá piú significative anche nel caso di varietá riemanniane piú generali. La differenza essenziale è dovuta alla presenza di connessioni riducibili che portano alla esistenza di punti singolari nello spazio dei moduli. La struttura dello spazio ${\mathcal{M}^1}_{SU(2)}$ è la seguente (vedi fig. 2):
1) per un insieme denso di metriche riemanniane su M, ${\mathcal{M}^1}_{SU(2)}$ - $\{p_1, ...p_m\}$ è una varietá liscia a cinque dimensioni , dove m è la metá del numero delle soluzioni di $\omega(a, a) = 1$;
2) vicino ai punti singolari p_i la struttura di ${\mathcal{M}^1}_{SU(2)}$ è quella di un cono sullo spazio proiettivo complesso $\mathbf{C}P^2$;
3) ${\mathcal{M}^1}_{SU(2)}$ è orientabile;
4) la 4-varietá M fa parte del bordo di ${\mathcal{M}^1}_{SU(2)}$, cioè c'è un collare $(0, \lambda] \times M$ incluso in ${\mathcal{M}^1}_{SU(2)}$, in modo che ${\mathcal{M}^1}_{SU(2)} \cup M \supset (0, \lambda] \times M$ è una varietá compatta con bordo.
In analogia al caso di S^4, la varietá M si presenta dunque come parte del bordo dello spazio dei moduli. In particolare, attraverso lo spazio dei moduli, M coborda con una somma disgiunta di spazi proiettivi. Poichè la forma d'intersezione è invariante per cobordismo (orientato), segue il teorema di Donaldson. Osserviamo che non si sa se lo spazio dei moduli sia connesso.

In casi piú generali, cioè per $k \neq 1$ e per gruppi compatti e semisemplici diversi da $SU(2)$, si conosce la dimensione dello spazio $\mathcal{M}^k_G$ mentre è largamente ignota la sua struttura globale.

Altre interessanti applicazioni delle teorie di gauge in matematica riguardano le 3-varietá e la teoria dei nodi, tramite lo studio delle cosiddette *teorie di Chern-Simon*, e gli spazi di moduli dei fibrati olomorfi stabili su superfici di Riemann.

5. Aspetti quantistici delle teorie di Y.M.

Nella formulazione funzionale delle teorie quantistiche di gauge ci si scontra con il problema di definire e calcolare espressioni formali del tipo

$$< W >= \frac{1}{C} \int_{\mathcal{A}} e^{-S(A)} W(A) DA$$

dove DA sta ad indicare una "misura" sullo spazio delle connessioni $\mathcal{A}$, $W(A)$ indica un funzionale gauge invariante e C è una "costante" tale che $< 1 >= 1$. Il problema principale, tutt'ora irrisolto, è la costruzione della misura DA. In realtá, la misura andrebbe costruita sullo spazio delle orbite $\mathcal{O}$; infatti, la teoria classica è gauge invariante ed in ogni caso ci si aspetta che le orbite di $\mathcal{G}$ in $\mathcal{A}$ abbiano "misura" infinita.

La procedura di Faddeev-Popov consiste nella scelta di una sezione del fibrato delle orbite di gauge (*gauge fixing*). Il modo piú semplice di capire questa costruzione e di fissare una connessione A_0 e di considerare le connessioni $A_0 + \eta$ con $d^*_{A_0}\eta = 0$ (gauge di *Coulomb*, V. fig. 1). Si parametrizzano poi le connessioni in $A \in \mathcal{A}$ tramite coppie $(\eta, g) \in ker d^*_{A_0} \times \mathcal{G}$ tali che $A = (A_0 + \eta)^g$. Questo "cambiamento di variabili" (lecito a priori solo in assenza dell'ambiguitá di Gribov) introduce il funzionale $detd_A$ (*determinante di Faddeev-Popov*) come "determinante Jacobiano" nell'integrale funzionale, con $d_A : \Omega^0(EndE) \to \Omega^1(EndE)$. Spesso se ne dá una rappresentazione "esponenziale" mediante l'introduzione di campi ausiliari detti *ghosts* (V.). Naturalmente il determinante va opportunamente regolarizzato ma ció distrugge l'invarianza di gauge. La "misura" cosíottenuta è la *misura di Faddeev-Popov* ed è moralmente una misura su $\mathcal{O}$.

Nelle applicazioni al modello standard delle particelle elementari, il funzionale $W(A)$ è il funzionale di vuoto dei fermioni chirali accoppiati al potenziale di gauge A. Come vedremo, W(A) non è gauge invariante. È peró possibile fissare il contenuto in fermioni chirali della teoria in modo che la non-invarianza di $W(A)$ compensi esattamente quella della misura di Faddeev-Popov.

Lo studio delle proprietá di trasformazione di $W(A)$ o del determinante di Faddeev-Popov è noto come problema delle *anomalie* (V.) si presenta in generale quando, sebbene l'azione classica di una teoria sia invariante per un gruppo di trasformazioni, l'azione effettiva quantistica Γ non lo è.

Nel caso delle teorie di gauge, ci concentreremo sul funzionale di vuoto $W(A)$ per fermioni chirali su S^4 in un campo di gauge esterno con potenziale A. $W(A)$ è definito come il determinante regolarizzato dell'operatore di Dirac chirale accoppiato con A ed è dunque un funzionale sullo spazio delle connessioni $\mathcal{A}$, mentre la teoria quantistica è definita sullo spazio delle orbite $\mathcal{O}$: lo spazio dei gradi di libertá fisici. Se $W(A)$ non ha le "giuste" proprietá di trasformazione per trasformazioni di gauge, non "scende" (o non puó essere ridefinito in modo che scenda) come una funzione sullo spazio delle orbite e la teoria quantizzata non puó essere correttamente definita: in particolare la fase dell'azione effettiva $\Gamma = logW$ non è ben definita.

Il problema delle anomalie è direttamente connesso alla topologia del gruppo delle trasformazioni di gauge. Per semplicitá considereremo il gruppo delle trasformazioni di gauge puntate (che denoteremo in questo paragrafo con $\mathcal{G}$) e la sua azione a destra libera su $\mathcal{A}$. Come giá visto, $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{O} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ è un fibrato principale.

Se pensiamo W come una sezione del fibrato banale $\mathcal{L} = \mathcal{A} \times \mathbf{C}$, un modo ovvio di descriverne le proprietá di trasformazione è di innalzare l'azione di $\mathcal{G}$ ad $\mathcal{L}$ nel modo seguente $(A, W) \to (Ag, f(A, g)W)$, dove $f : \mathcal{A} \times \mathcal{G} \to \mathbf{C}^*$ è definita da $W(Ag) = f(A, g)W(A)$. Il funzionale f individua una classe in $H^1(\mathcal{G}, \mathbf{C}^*(A))$, il primo gruppo di coomologia di $\mathcal{G}$ a valori nel $\mathcal{G}$-modulo delle funzioni a valori complessi non nulle su $\mathcal{A}$. Tale gruppo risulta isomorfo al gruppo $H^2(\mathcal{O}, \mathbf{Z})$ dei fibrati in linee complesse su $\mathcal{O}$. In accordo a ció, a $\mathcal{L}$ si puó associare un unico fibrato in linee L su $\mathcal{O}$. Se $f(A, g)$ non è coomologa a zero, il fibrato $\mathcal{L}$, topologicamente banale, non è banale come $\mathcal{G}$-fibrato (cioè non ammette trivializzazioni globali $\mathcal{G}$ invarianti) e, pertanto, le sue sezioni non sono invarianti. Equivalentemente il fibrato in linee $L \to \mathcal{O}$ non è banale topologicamente e la $\mathcal{G}$-azione $f(A, g)$ su $\mathcal{L}$ determina la classe di Chern $c_1(L) \in H^2(\mathcal{O}, \mathbf{Z})$. Nel nostro caso L risulta essere il determinante del fibrato dell'indice della famiglia di operatori di Dirac chirali parametrizzata da $\mathcal{O}$, e la sua classe di Chern *reale* è calcolata attraverso il teorema dell'indice per famiglie di Atiyah-Singer. La forma $c_1(L)$, vista su $\mathcal{A}$, risulta esatta : $\pi^* c_1(L) = dT$ e la sua "trasgressione" T, ristretta alle $\mathcal{G}$-orbite in $\mathcal{A}$, coincide con la ben nota *anomalia locale non abeliana (integrata)* $a = \delta W/W$, ove δW indica la variazione di W indotta da trasformazioni di gauge infinitesime. In effetti a è un elemento del gruppo di coomologia $H^1(Lie\mathcal{G}, \mathbf{C}(\mathcal{A}))$ dell'algebra di Lie del gruppo delle traformazioni di gauge a valori nel $Lie\mathcal{G}$-modulo dei funzionali su $\mathcal{A}$ a valori complessi. L'operatore δ in questa coomologia puó essere identificato con l'operatore BRS (V.). L'anomalia a soddisfa la condizione $\delta a = 0$ (condizione di consistenza di Wess e Zumino) e non è banale se non esiste un funzionale $\Gamma \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ tale che $a = \delta\Gamma$. In altre parole, a è la variazione logaritmica di W, ma $\Gamma = logW$ non è ben definito.

Gli elementi di torsione in $H^1(\mathcal{G}, \mathbf{C}^*(A)) = H^2(\mathcal{O}, \mathbf{Z})$, presenti quando $\mathcal{G}$ non è connesso, danno origine alle *anomalie globali*: $W(A)$ potrebbe essere invariante per trasformazioni di gauge "infinitesime", (assenza di *anomalie locali*), ma non esserlo per trasformazioni di gauge "grandi", non deformabili cioè all'identitá. Tali anomalie, contrariamente a quelle locali, non sono rappresentabili mediante funzionali nei campi fisici e non portano a correnti non conservate, nondimeno, la loro presenza riflette patologie dell'azione effettiva Γ. Nel caso di teorie su S^4 con gruppo $G = SU(n)$ con $n > 2$, le anomalie globali sono assenti. Sono invece presenti per teorie $SU(2)$ non chirali su S^4, oppure per teorie su varietá M con torsione nel gruppo fondamentale.

L'azione classica dei fermioni chirali risulta invariante anche per il gruppo $U(1)$ delle trasformazioni chirali. Sebbene banale su $\mathcal{A}$, questa azione a priori non preserva il determinante regolarizzato dell'operatore di Dirac. Corrispondentemente, il fibrato $\mathcal{L}$ di cui $W(A)$ è una sezione potrebbe portare anche una azione non banale di $U(1)$ (*anomalia abeliana*). Le possibili azioni $(A, W) \to (A, r_m(e^{i\theta})W)$ di $U(1)$ su $\mathcal{L}$ e banali sulla base $\mathcal{A}$ sono classificate da un intero m che è il carattere della rappresentazione $r_m : U(1) \to \mathbf{C}^*$. Nel nostro caso, m è dato dal rango del fibrato dell'indice prima citato. La *anomalia abeliana integrata* è allora $\delta_{U(1)}W/W = im$, e il teorema dell'indice fornisce il valore della divergenza della corrente abeliana chirale.

Bibliografia

[1] M.F. Atiyah "Geometry of Yang-Mills Fields" Lezioni Fermiane, Scuola Normale Superiore - Pisa 1979.

[2] M.F. Atiyah, R. Bott "The Yang-Mills Equations over Riemann Surfaces" Phil. Trans. R. Soc. London **A308** (1982) 523.

[3] D.S.Freed, K.Uhlenbeck "Instantons and four manifolds" Math.Sci.Res.Inst.Publ., Springer-Verlag N.Y.(1984).

[4] I.M. Singer "Some Remarks on the Gribov Ambiguity" Commun. Math. Phys. **60** (1979) 7.

[5] M.F. Atiyah, I.M. Singer "Dirac Operators Coupled to Vector Potentials" Proc. Natl. Acad. Sci. **81** (1984) 2597.

[6] R. Stora "Continuum Gauge Theories" in New developments in quantum field theories and statistical mechanics, H.Levy e P. Mitter (eds.). Plenum Press N.Y. (1977).

Roberto Catenacci e Cesare Reina

Fig. 1. La struttura locale dello spazio delle orbite. Le orbite di $\bar{\mathcal{G}}$ sono disegnate come se fossero monodimensionali e lo spazio $\bar{\mathcal{O}}$ come se fosse bidimensionale.

Fig. 2. Lo spazio dei moduli $\mathcal{M}^1_{SU(2)}$ degli 1-istantoni di $SU(2)$.