<u>RICHIAMI SUI NUMERI COMPLESSI E I POLINOMI</u>.

Equazioni quadratiche.

Una equazione quadratica in x è una equazione della forma: $ax^2+bx+c=0$ dove a,b,c sono numeri reali e $a \neq 0$. Non è difficile risolverla; quando $\Delta = b^2-4ac \geq 0$ (la stessa formula vale anche se $\Delta < 0$, ma ne parleremo dopo) si ha:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ci sono due tipi di equazioni quadratiche; quelle che hanno soluzioni *razionali* (ovvero che si possono scrivere nella forma m/n con m e n numeri interi relativi e $n \neq 0$) e quelle le cui soluzioni sono *irrazionali.* Le soluzioni sono razionali quando Δ è il quadrato di un numero razionale. Esempi di numeri irrazionali sono $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$.

Dimostriamo che $\sqrt{2}$ è irrazionale. Supponiamo che sia razionale; allora $\sqrt{2} = m/n$, *con* m *e* n *senza fattori comuni*; elevando al quadrato si ha: $m^2 = 2n^2$. Questo significa che m^2 è un numero pari e quindi anche m lo è (questa ultima osservazione deriva dal fatto che il quadrato di un numero dispari è un numero dispari, infatti $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$; ora usiamo anche il seguente fatto: se la proposizione A implica la proposizione B, allora la proposizione non-B implica la proposizione non-A. (m dispari implica m^2 dispari allora m^2 non-dispari cioè pari implica m non-dispari cioè pari). Allora $m = 2k$ e quindi $4k^2 = 2n^2$ cioè $n^2 = 2k^2$ così n^2 è pari e anche n lo è. Allora sia m che n sono numeri pari e quindi hanno in comune almeno il fattore 2.

Questa è una contraddizione perchè abbiamo supposto che m *e* n *siano senza fattori comuni.* La contraddizione si risolve *solo negando l'assunto* che $\sqrt{2}$ sia razionale.

Il ragionamento precedente è un esempio di **dimostrazione per assurdo**, il metodo consiste nell'assumere falsa la proposizione che si vuole dimostrare e cercare di ottenere una contraddizione.

La formula risolutiva delle equazioni di secondo grado data sopra implica che una tale equazione ha, al più, due soluzioni. Se $\Delta = b^2-4ac = 0$ l'equazione ha una sola soluzione *(meglio dire due soluzioni coincidenti)*, se $\Delta = b^2-4ac > 0$ l'equazione ha due soluzioni distinte. Se $\Delta = b^2-4ac < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali; introducendo i **numeri complessi** si possono estrarre le radici quadrate dei numeri negativi e si ripristina la simmetria: una equazione di grado *due* ha sempre *due* soluzioni (distinte o coincidenti).

Due equazioni $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ e $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ hanno le stesse soluzioni se e solo se sono proporzionali, cioè se esiste una costante $k \neq 0$ tale che $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2 = k$.

Questa osservazione è utile perchè ci consente di scrivere subito, senza risolvere l'equazione, la somma e il prodotto delle sue soluzioni: siano α e β le soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c = 0$. Anche l'equazione $a(x-\alpha)(x-\beta) = 0 = ax^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ ha ovviamente le stesse soluzioni quindi, confrontando con l'equazione originaria, si trova: $\alpha + \beta = -b/a$ e $\alpha\beta = c/a$.

Esempio: data l'equazione $8x^2 - 9x + 2 = 0$ trovare una equazione che abbia come soluzioni i quadrati delle soluzioni dell'equazione data. Siano α e β le soluzioni: si ha $\alpha + \beta = -9/8$ e $\alpha\beta = 1/4$. Notiamo che $(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 49/16$ e $\alpha^2\beta^2 = 1/16$. Quindi l'equazione richiesta è $x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = x^2 - 49/16x + 1/16 = 0$.

Questo metodo funziona per trovare equazioni le cui radici siano **funzioni simmetriche** (una funzione f di α e β è simmetrica se $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$) delle radici dell'equazione data; infatti **tutte** le funzioni simmetriche si possono scrivere in funzione delle due funzioni simmetriche elementari $f_1(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$ e $f_2(\alpha, \beta) = \alpha\beta$.

Esempio: $\alpha^3 + \beta^3 = 3(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$.

NUMERI COMPLESSI

Per introdurre i numeri complessi si parte di solito dal fatto che l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni. Si *inventa* allora una soluzione dell'equazione data e la si chiama i. Si tratta poi i come un normale numero a cui si applicano le solite regole di calcolo e allora si ottiene $i^2 = -1$. Si scrivono poi tutti i simboli del tipo $a + ib$ con a e b numeri reali e si postulano per essi le usuali regole di calcolo: ecco i **numeri complessi**.

Un modo più *convincente* per introdurre i numeri complessi è quello di farli discendere direttamente dalle coppie di numeri reali.

Indichiamo con $\mathbb{R}$ il campo dei numeri reali con le solite operazioni e con $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi.

Un **numero complesso** è una coppia ordinata di numeri reali $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cioè

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Definiamo $\forall\,(a, b)\,, (c, d) \in \mathbb{C}$ le seguenti operazioni :

$i)$ **somma**: $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$;

ii) **prodotto**: $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

Viene naturale identificare $a\in\mathbb{R}$ con la coppia $(a,0)\in\mathbb{C}$, cioè ogni numero reale può essere pensato come numero complesso $\Rightarrow\mathbb{C}$ è un "ampliamento" di $\mathbb{R}$, cioè $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
L'elemento $(0,1)\in\mathbb{C}$, si denota con i ed è detto **unità immaginaria**. Si ha

$$i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Prendiamo $(a,b)\in\mathbb{C}$:

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)\cdot(b,0)=a+ib,$$

cioè ogni numero complesso può essere scritto nella forma $a+ib$, detta **forma algebrica**. a è chiamata **parte reale**, ib è la **parte immaginaria**. Le operazioni tra numeri complessi scritti in forma algebrica si eseguono con le regole del calcolo letterale:

$$\begin{gathered}(a+ib)+(c+id)=a+ib+c+id=(a+c)+i(b+d);\\ (a+ib)\cdot(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=ac+iad+ibc-bd\\ =(ac-bd)+i(ad+bc).\end{gathered}$$

Dato $z=a+ib$, si definisce il numero **complesso coniugato**

$$\overline{z}=a-ib.$$

Per semplificare una frazione con un complesso a denominatore, si può moltiplicare numeratore e denominatore per il coniugato del numero, osservando che $(a+ib)\cdot(a-ib)=a^2-iab+iab-i^2b=a^2+b^2$.

Rappresentazione geometrica dei numeri complessi
Fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano Oxy. Un numero complesso (a,b) può essere pensato come punto del piano π (**piano complesso**): a rappresenta l'ascissa e b l'ordinata.

OSSERVAZIONI.

1) Se $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = (a, 0) \Rightarrow z$ sta sull'asse x (detto **asse reale**).

2) Se $z = ib$, cioè z è immaginario puro $\Rightarrow z = (0, b)$ sta sull'asse y (detto **asse immaginario**).

3) La moltiplicazione per i equivale quindi a una rotazione di $90°$ in senso antiorario.

Forma trigonometrica di un numero complesso. Sia $z = a + ib$ un numero complesso e sia P la sua immagine sul piano π. Associamo a z due "coordinate polari" (ρ, θ):

1) $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ è detto **modulo** di z ed è la lunghezza del segmento che congiunge l'origine con il punto P;

2) θ è detto **anomalia** o **argomento** di z, è l'angolo tra ρ e il semiasse positivo delle x ed **è individuato a meno di multipli di 2π.**

Dalla trigonometria si ha che

$$a = \rho \cos\theta \qquad b = \rho \sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dalle formule precedenti si ottiene:

$$\boxed{a + ib = \rho\,(\cos\theta + i \sin\theta)},$$

detta **forma trigonometrica** del numero complesso $a + ib$.

Due numeri complessi non nulli $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ sono uguali se $\rho_1 = \rho_2$ e $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, con k intero.

Teorema. Dati $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, il loro prodotto è

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

Tale regola vale anche per un numero qualsiasi di fattori. Se i fattori sono uguali, si ha la **formula di De Moivre**:

$$[\rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n\,(\cos n\theta + i \sin n\theta)\,, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Esempio: $(1+i)^{14} = (\sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4))^{14} = 128(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)) = -128i$, infatti $14\pi/4 = 7\pi/2 = 4\pi - \pi/2$ (provate solo a pensare di dover fare il calcolo senza la formula di De Moivre per capirne l'importanza !).

Se si conviene di porre

$$[\rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)]^0 = 1, \text{ per } \rho \neq 0$$
$$[\rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-n} = \frac{1}{[\rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)]^n},$$

la formula di De Moivre vale per $n \in \mathbb{Z}$.

Radici n-esime dei numeri complessi. Sia $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. I numeri $w \in \mathbb{C}$ tali che $w^n = z$, si dicono **radici n-esime** di z.

Prendiamo $z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ e sia $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ una radice n-esima di z. Si deve avere

$$w^n = z \Rightarrow r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$\Rightarrow r^n = \rho \text{ e } n\varphi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow r = \sqrt[n]{\rho} \text{ (radice aritmetica) e } \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

L'ultima formula dà infiniti valori per φ, ma solo n sono distinti ($k = 0, 1, ..., n-1$ poi si ripetono a meno di multipli di 2π).

Teorema. $z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ ammette n radici n-esime w distinte date dalla formula

$$(\sharp) \qquad \boxed{w = \sqrt[n]{z}^{*} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]},$$

nella quale si pone $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

(L'asterisco serve solo a distinguere la radice complessa da quella aritmetica).

Gli n numeri forniti da $(\sharp)$, hanno lo stesso modulo $\sqrt[n]{\rho}$, quindi le loro immagini sul piano complesso stanno su una circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$.

Scegliamo $z = 1 = 1 + 0i = 1(\cos 0 + i\sin 0)$. Utilizzando $(\sharp)$, troviamo le n **radici n-esime dell'unità**:

$$\epsilon_k = \sqrt[n]{1}^* = \sqrt[n]{1}\left[\cos\left(0+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(0+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$
$$= \cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}, \text{ con } k=0,1,2,...,n-1.$$

Le radici n-esime dell'unità si rappresentano geometricamente come vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio 1, con un vertice nel punto $(1,0)$.

Le radici n-esime dell'unità servono per calcolare le radici n-esime di qualsiasi numero: basta moltiplicare una qualsiasi radice complessa del numero per le radici n-esime dell'unità. Infatti sia ζ una qualunque radice n-esima di z, ponendo $\zeta_k = \zeta\epsilon_k$ si ottengono tutte le radici di z, infatti: $(\zeta_k)^n = (\zeta\epsilon_k)^n = \zeta^n\epsilon_k^n = z$

ESEMPI.

1) Calcolare le tre radici cubiche complesse di 8.

Scriviamo 8 in forma trigonometrica:

$$8 = 8+0i = 8(\cos 0 + i\sin 0).$$
$$w_k = \sqrt[3]{8}^* = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right),\ k=0,1,2.$$

Quindi

$w_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2;$

$w_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1+i\sqrt{3};$

$w_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1-i\sqrt{3}.$

Le tre radici cubiche di 8 sono: 2, $-1+i\sqrt{3}$ e $-1+i\sqrt{3}$.

2) Calcolare le quattro radici quarte di $-1+i\sqrt{3}$.

Si ha:

$$\rho = \sqrt{1+3} = 2,\ \cos\theta = -\frac{1}{2} \text{ e } \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$
$$\Rightarrow -1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Applicando la ($\sharp$) con $k = 0, 1, 2, 3$, si ha

$$w_k = \sqrt[4]{-1 + i\sqrt{3}}^* = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)\right].$$

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{3} + i\right);\\
w_1 &= \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3};}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right);\\
w_2 &= \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)\right] = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\\
&= \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(-\sqrt{3} - i\right);\\
w_3 &= \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right)\right] = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\\
&= \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3};}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

3) Calcolare le sei radici seste dell'unità.
Si ha:

$$\epsilon_k = \sqrt[6]{1}^* = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}, \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 &= \cos 0 + i\sin 0 = 1;\\
\epsilon_1 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\\
\epsilon_2 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\\
\epsilon_3 &= \cos\pi + i\sin\pi = -1;\\
\epsilon_4 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};\\
\epsilon_5 &= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Le sei radici trovate sono i vertici di un esagono regolare.

Formula di Eulero. Consideriamo la funzione esponenziale di variabile complessa $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$.

Valgono le consuete proprietà delle potenze:

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w}; \qquad e^z : e^w = e^{z-w}; \qquad (e^z)^n = e^{nz},$$

con $z, w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Se $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si pone

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Quindi è

$$\boxed{e^{iy} = (\cos y + i \sin y)}.$$

Quest'ultima è la **formula di Eulero**.
Si ha

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 + 0i = 1$$

e

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z,$$

cioè l'esponenziale e^z è periodica di periodo $2\pi i$.
Inoltre

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y.$$

Esempio.
$i = 0 + 1i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2} i}$;
$-1 = -1 + 0i = \cos \pi + i \sin \pi = e^{\pi}$.

POLINOMI

Un **polinomio** nella variabile x è un'espressione

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

con $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), detti **coefficienti** del polinomio e $n \in \mathbb{N}$, detto **grado** del polinomio: $n = \deg P(x)$. Se $a_n = 1$, il polinomio è detto **monico**. L'insieme dei polinomi in x su $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) è denotato con $\mathbb{R}[x]$ (o $\mathbb{C}[x]$). Il **polinomio nullo** è il polinomio con tutti i coefficienti uguali a 0. Un **polinomio costante** è il polinomio nullo oppure un polinomio di grado 0.

Due polinomi in x sono uguali se hanno uguali i coefficienti delle potenze di x corrispondenti. I polinomi si sommano e si moltiplicano secondo le regole note del calcolo letterale.

Algoritmo della divisione. Dati due polinomi $A(x)$, $B(x) \in \mathbb{R}[x]$, sono determinati in modo unico i polinomi $Q(x)$ (**quoziente**) e $R(x)$ (**resto**) in $\mathbb{R}[x]$, tali che

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

con $R(x) = 0$ oppure $\deg R(x) < \deg B(x)$.
Se $\deg A(x) = n$, $\deg B(x) = m$:
i) se $m \leqslant n \Rightarrow \deg Q(x) = n - m$ e $\deg R(x) < m$;
ii) se $m > n \Rightarrow \deg Q(x) = 0$ e $R(x) = A(x)$.

Se nel polinomio $A(x) \in \mathbb{R}[x]$, x è sostituita da un $c \in \mathbb{R}$, il risultato è un elemento di $\mathbb{R}$ (e lo stesso vale se invece di $\mathbb{R}$ lavoriamo in $\mathbb{C}$).

Esempio.
$A(x) = x^3 - 2x^2 + 2 \in \mathbb{R}[x]$
$A(3) = 27 - 18 + 2 = 11 \in \mathbb{R}$.

Teorema del resto. Siano $A(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $B(x) = x - c$, con $c \in \mathbb{R}$. Il resto della divisione di $A(x)$ per $B(x)$ è $A(c)$.

Infatti $A(x) = (x - c)Q(x) + R(x)$ e ponendo $x = c$ si ottiene $A(c) = R(c) = R(x)$ perchè il grado del resto deve essere, in questo caso, zero (il grado del resto è minore del grado del polinomio divisore) e quindi $R(x)$ è un polinomio costante.

ESEMPIO.
$A(x) = x^3 - 2x^2 + 2$, $B(x) = x - 3$.
$R(x) = A(3) = 11$.
Il risultato si può facilmente verificare eseguendo la divisione tra i due polinomi.

Dati $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[x]$ con $B(x) \neq 0$, diciamo che $A(x)$ è **divisibile** per $B(x)$ se $A(x) = B(x)Q(x)$, cioè se il resto della divisione è 0.
$c \in \mathbb{R}$ si dice **radice** (o **zero**) di un polinomio $A(x) \in \mathbb{R}[x]$ se $A(c) = 0$.

Teorema di Ruffini. Se $A(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $c \in \mathbb{R}$, allora c è radice di $A(x) \Leftrightarrow A(x)$ è divisibile per $x - c$.

Teorema fondamentale dell'algebra. Ogni polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado $n \geqslant 1$, ha sempre n radici in $\mathbb{C}$.
Se il polinomio è monico e le radici sono $x_1, ..., x_n$ allora possiamo scomporre il polinomio nella forma

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n).$$

Se una radice compare k volte nella scomposizione, diciamo che ha **molteplicità algebrica** k. In questo caso essa è radice non solo del polinomio, ma anche delle sue derivate fino all'ordine $k - 1$.

RELAZIONI DI RICORRENZA LINEARI OMOGENEE DI ORDINE 2

Possiamo ora concludere il discorso sulle relazioni di ricorrenza di ordine due. Ricordiamo che una relazione del tipo che stiamo studiando è:

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

Non consideriamo la soluzione banale $u_n = 0$ per tutti gli n. Supponiamo che la soluzione cercata sia della forma $u_n = \alpha^n A$ con $A \neq 0$ Allora deve essere:

$$a\alpha^{n+2}A + b\alpha^{n+1}A + c\alpha^n A = 0$$

Quindi si ottiene (dividendo per un $u_n = \alpha^n A$ diverso da zero, che esiste per ipotesi) $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$. Ciò significa che α deve essere soluzione della seguente equazione di secondo grado, detta **equazione ausiliaria**:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ci sono ora tre casi, distinti in base al tipo di radici della equazione ausiliaria:

a) l'equazione ha **due radici reali e distinte** α e β : è immediato verificare che la soluzione è:

$$u_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

con A e B determinati dalle condizioni: $u_0 = A + B$ e $u_1 = A\alpha + B\beta$

b) l'equazione ha **due radici reali e coincidenti** $\alpha = \beta = -b/2a$: la soluzione è:

$$u_n = (A + Bn)\alpha^n$$

con A e B determinati dalle condizioni: $u_0 = A$ e $u_1 = A\alpha + B\alpha$.

Infatti già sappiamo che $A\alpha^n$ è una soluzione; sostituendo $Bn\alpha^n$ nella relazione $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$ si ottiene:

$$aB(n+2)\alpha^{n+2} + bB(n+1)\alpha^{n+1} + cBn = \alpha^n(Bn(a\alpha^2 + b\alpha + c) + B(2a\alpha + b))$$

Ma $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ e $2a\alpha + b = 0$ perchè α è radice di molteplicità 2 e quindi $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Avendo mostrato che $A\alpha^n$ e $Bn\alpha^n$ sono soluzioni, anche la loro somma lo è.

c) l'equazione ha **due radici complesse coniugate** α e $\bar{\alpha}$: è immediato verificare che la soluzione è

$$u_n = A\alpha^n + B\bar{\alpha}^n$$

Siccome per ipotesi u_n è un numero **reale** per ogni n, segue che B **deve essere il complesso coniugato di** A. Inoltre, posto $\alpha = re^{i\theta}$, si ha $\alpha^n = r^n e^{in\theta}$ e $\bar{\alpha}^n = r^n e^{-in\theta}$ per cui (ricordando che $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$)

$$u_n = r^n(C \cos n\theta + D \sin n\theta)$$

Dove $C = A + B$ e $D = i(A - B)$ sono **due numeri reali determinati dalle condizioni:**

$$u_0 = C \text{ e } u_1 = r(C \cos\theta + D \sin\theta)$$

ESEMPIO: la relazione da risolvere sia:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0 \text{ con } u_0 = 1, u_1 = 2$$

Le radici dell'equazione ausiliaria sono:

$$\alpha = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \text{ e } \bar{\alpha} = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

La soluzione generale è:

$$u_n = \sqrt{2}^n (C \cos n\pi/4 + D \sin n\pi/4)$$

Le condizioni $u_0 = 1, u_1 = 2$ danno $C = 1$ e $2 = \sqrt{2}(C \cos \pi/4 + D \sin \pi/4)$ ovvero $C = D = 1$ perchè $\cos \pi/4 = \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$. La soluzione della nostra relazione è quindi:

$$u_n = \sqrt{2}^n (\cos n\pi/4 + \sin n\pi/4)$$

IL PIANO COME SPAZIO VETTORIALE.

Con $\mathbb{R}^2$ indichiamo l'insieme delle coppie (a, b) di numeri reali. Si può definire la somma $(+)$ tra coppie:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

e il prodotto $(\cdot)$ di un numero reale α per una coppia (a, b):

$$\alpha\,(a, b) = (\alpha a, \alpha b).$$

Con $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) indichiamo l'insieme delle n-uple $(a_1, a_2, ..., a_n)$ di numeri reali (o complessi). In analogia con il caso di $\mathbb{R}^2$, si definiscono una somma e un prodotto per un numero reale (o complesso).

Le proprietà di queste operazioni serviranno come traccia per definire, più astrattamente, la nozione di **spazio vettoriale.**