Geometria 1A – Algebra Lineare. 10 Aprile 2008

1. Considerata la matrice reale simmetrica $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

   (a) Trovare gli autovalori e gli autospazi di A.

   (b) Trovare una forma diagonale di A e una matrice diagonalizzante.

   (c) Trovare una matrice **ortogonale** diagonalizzante.

   (d) Scrivere il polinomio caratteristico della matrice $B = A^{-2}$.

   (e) Trovare la matrice A^{-1}.

2. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base (e_1, e_2, e_3) e l'applicazione lineare data da:

$$\begin{gathered} f(e_1) = e_1 + e_3 \\ f(e_2) = ke_2 \\ f(e_3) = ke_1 + ke_3 \end{gathered}$$

   (a) Trovare i valori di k per cui l'applicazione è diagonalizzabile.

3. Sia A una matrice reale $n \times n$ tale che $A^2 = A$.

   (a) Scrivere i possibili polinomi caratteristici.

   (b) Indicato con V_1 l'autospazio dell'autovalore 1, mostrare che $V_1 = \operatorname{Im} A$.

   (c) Dedurne la diagonalizzabilità di A.

   (d) Supponendo inoltre che A sia simmetrica rispetto a un dato prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$, mostrare che $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ v - Av \in (V_1)^{\perp}$

4. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}_n[x]$ dei polinomi in una indeterminata x, a coefficienti reali e di grado al più n, e l'applicazione "derivazione" definita da $d : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \to d(P(x)) = a_1 + 2\, a_2 x \cdots + n\, a_n x^{n-1}\,.$$

   E' noto che $\mathbb{R}_n[x]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma di polinomi, di dimensione $n+1$, con base $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$.

   (a) Dimostrare che d è una applicazione lineare e calcolare la matrice associata rispetto alla base data precedentemente.

   (b) Determinare il nucleo $\ker(d) = \{P(x) \in \mathbb{R}_n[x] | d(P(x)) = 0\}$ e l'immagine:

$$\operatorname{Im}(d) = \{P(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[x] | P(x) = dG(x), G(x) \in \mathbb{R}_n[x]\},$$

   e verificare il teorema delle dimensioni.

   (c) Dimostrare che esiste sempre un intero q tale che $d^q \equiv d \cdot d \cdot ... \cdot d$ è l'applicazione nulla.

   (d) Posto $n > 2$ determinare $d^{-1}(1 + x)$.

   (e) Considerando ora invece $d : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, definito come sopra ma in modo che la matrice che lo rappresenti sia quadrata, dimostrare che le due matrici $A_{\pm} = d \pm I$ sono invertibili.

Soluzioni.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$:

   (a) Basi degli autospazi e corrispondenti autovalori:

   $$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -2, \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 4, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 8$$

   (b) Una forma diagonale e una matrice diagonalizzante sono, ad esempio:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   (c) Una matrice diagonalizzante ortogonale è, ad esempio:

   $$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (d) Il polinomio caratteristico di A^{-2} è $p(\lambda) = \left(\frac{1}{4} - \lambda\right)\left(\frac{1}{64} - \lambda\right)\left(\frac{1}{16} - \lambda\right)$

   (e) La matrice inversa è:

   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & 0 \\ \frac{5}{16} & -\frac{3}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

2. La matrice associata è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$, con autovalori $k+1, 0, k$. La matrice è diagonalizzabile per $k \neq 0, -1$ perchè gli autovalori sono tutti reali e distinti. Per $k = 0$ gli autovettori sono:

   $$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 0, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1$$

   e quindi la matrice è diagonalizzabile perchè l'autovalore doppio 0 è regolare. Per $k = -1$ si vede subito che non è diagonalizzabile perchè l'autovalore doppio 0 non è regolare.

3. Gli autovalori possono essere solo 0 e 1, quindi i polinomi caratteristici sono $(-\lambda)^a(1-\lambda)^b$ con $a+b=n$.Se $v \in V_1$ si ha: $v = Av$ e quindi $v \in \operatorname{Im} A$. Viceversa se $v = Aw$, si ottiene $Av = A^2w = Aw = v$ e quindi $v \in V_1$. La matrice è diagonalizzabile perchè se il suo rango è b, la dimensione dell'autospazio V_1 è, per il punto precedente, anch'essa b. La dimensione del nucleo (che è anche l'autospazio dell'autovalore 0) è, per il teorema delle

dimensioni, $n-b$, e quindi la somma delle dimensioni degli autospazi è n. Esiste sempre quindi una base di autovettori. Per dimostrare l'ultimo punto; $\forall w \in V_1$ si ha, utilizzando la simmetria:

$$(v - Av, w) = (v, w) - (Av, w) = (v, w) - (v, Aw) = (v, w) - (v, w) = 0$$

4. La verifica che d è lineare è banale. Nella base assegnata si ha:

$$\begin{array}{rcl} d(1) & = & \mathbf{0} + 0x + ... + 0x^{n-1} \\ d(x) & = & \mathbf{1} + 0x + ... + 0x^{n-1} \\ d(x^2) & = & 0 + \mathbf{2}x + 0x^2 + ... + 0x^{n-1} \\ ... & = & ... \\ d(x^n) & = & 0 + 0x + ... + 0x^{n-2} + \mathbf{n}x^{n-1} \end{array}$$

per cui la matrice $n \times n+1$ associata è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 2 & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

Il nucleo è di dimensione 1, è dato dal polinomio nullo e dai polinomi di grado zero ed è quindi tutto $\mathbb{R}$. **L'immagine** è generata dalle colonne indipendenti della matrice e quindi da $\{1, 2x, 3x^2, ..., nx^{n-1}\}$ ed è tutto lo spazio dei polinomi $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Il teorema delle dimensioni è soddisfatto: $n+1 = \dim\ker d + \dim \operatorname{Im} d = 1+n$.

Se $P(x)$ è un qualsiasi polinomio $\in \mathbb{R}_n[x]$, è chiaro che $d^{n+1}(P(x)) = 0$.

Per definizione, $d^{-1}(1+x) = \{P(x) \in \mathbb{R}_n[x], n > 2 | d(P(x)) = 1 + x\} = \left\{a + x + \frac{x^2}{2} \text{ con } a \in \mathbb{R}\right\}$.
Le matrici quadrate $A_\pm = d \pm I$ sono invertibili perchè d non ha ± 1 come autovalori.