Geometria 1A – Algebra Lineare
11 - 04 - 2006.

PROBLEMA N. 1

Sia data la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 12 \\ 0 & 13 & -30 \\ 0 & 9 & -20 \end{pmatrix}$.

1. Calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori e una base per ciascun autospazio di C. **(5 punti)**
2. La matrice C è diagonalizzabile? In caso affermativo, trovare una matrice P ed una matrice diagonale D tali che $P^{-1}CP = D$. (**3 punti**)

PROBLEMA N. 2

Si consideri l'insieme di vettori $\mathcal{A} = \{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5}\}$ in $\mathbb{C}^3$, dove:
$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$;
$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$;
$\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 2+2i & -2+2i & -3+i \end{pmatrix}$;
$\overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} 1-i & 1-i & 2 \end{pmatrix}$;
$\overrightarrow{v_5} = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i & 4-7i \end{pmatrix}$.

1. Selezionare da $\mathcal{A}$ un sottoinsieme $\mathcal{B}$ che sia una base di $\mathbb{C}^3$. (**3 punti**)
2. Trovare una base ortonormale $\{\overrightarrow{w_1}; \overrightarrow{w_2}; \overrightarrow{w_3}\}$ di $\mathbb{C}^3$ i cui primi due vettori siano $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_2}$. (**4 punti**)

PROBLEMA N. 3

Sia data la famiglia di matrici $\{A_k\}$, con $k \in \mathbb{R}$, tali che

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1492 \\ 0 & k & 66 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Date le applicazioni lineari $f_k : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, $f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, espresse rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$, valutare la dimensione del nucleo di f al variare di k in $\mathbb{R}$, e scriverne una base. (**3 punti**)

2. Posto $k = 0$, sia $A = A_0$. Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A (non è richiesto di trovare i corrispondenti autovettori!). (**2 punti**)

3. Calcolare A^{2005} e A^{2007}. (**3 punti**)

PROBLEMA N. 4 (STUDENTI DI FISICA)

Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}.$$

è ortogonale? (**2 punti**)

1. Calcolare gli autovalori reali e una base per i corrispondenti autospazi. La matrice è diagonalizzabile in campo reale? In caso affermativo trovare due matrici reali Q e L, con L diagonale, tali che $Q^{-1}BQ = L$. (**2 punti**)

2. Calcolare gli autovalori complessi e una base per i corrispondenti autospazi. La matrice è diagonalizzabile in campo complesso? In caso affermativo trovare due matrici complesse Q e L, con L diagonale, tali che $Q^{-1}BQ = L$. (**3 punti**)

3. Data la matrice $B' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} & ?_1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{13}} & ?_2 \end{pmatrix}$, quali valori reali occorre attribuire a $?_1$ e a $?_2$ per ottenere una matrice in $SO(4)$? E se si richiedesse solamente che la matrice stia in $O(4)$? (**3 punti**)

PROBLEMA N. 5 (STUDENTI DI MATEMATICA)

Uno **spazio vettoriale simplettico** è uno spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^k$ di dimensione reale k con una forma $\omega : V \times V \longmapsto \mathbb{R}$ che gode delle proprietà seguenti:

- **bilinearità** (analoga all'equivalente proprietà dei prodotti scalari)
- **anti-simmetria:** $\omega(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}) = -\omega(\overrightarrow{w}; \overrightarrow{v})$, $\forall \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w} \in V$
- **non-degenere**: $\forall v \in V$, se $\omega(v; w) = 0$ $\forall w \in V$, allora $v = 0$. (Anche questa proprietà è soddisfatta dai prodotti scalari).

Il **complemento simplettico** di un sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^k$ è il sottospazio vettoriale

$$W^\omega = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^k : \omega\left(\vec{v}; \vec{w}\right) = 0, \forall \vec{w} \in W \right\}$$

. (Esso è analogo al complemento ortogonale nel caso di uno spazio vettoriale munito di un prodotto scalare).

Un sottospazio vettoriale W si dice **isotropo** se $W \subseteq W^\omega$.

- Si supponga ora che $\mathbb{R}^k$ sia dotato del prodotto scalare standard.

Data $\iota : \mathbb{R}^k \longmapsto \mathbb{R}^k$, con $\iota\left(\overrightarrow{v}\right)$ definito dal fatto di essere l'unico vettore di $\mathbb{R}^k$ tale che

$$\left\langle \iota\left(\overrightarrow{v}\right); \overrightarrow{u} \right\rangle = \omega\left(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{u}\right), \forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k.$$

1. Dimostrare che ι è un isomorfismo (**3 punti**)
2. Dimostrare che $\iota\left(W^\omega\right) = W^\perp$ (**2 punti**)
3. Dimostrare che ogni sottospazio vettoriale di dimensione 1 è isotropo. (**2 punti**)
4. Dimostrare che $\left(W^\omega\right)^\omega = W$ per ogni sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^k$. (**3 punti**)

Soluzioni

PROBLEMA N. 1

1. Il polinomio caratteristico è $10 - 6\lambda^2 - \lambda^3 - 3\lambda$. Gli autovalori sono: $\lambda = 1$; $\lambda = -2$; $\lambda = -5$, tutti con molteplicità algebrica 1. I corrispondenti autospazi sono:

$$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -5;$$

$$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -2;$$

$$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1.$$

2. C è diagonalizzabile, perchè tutti gli autovalori hanno molteplicità algebrica 1, e le matrici P e D richieste sono:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(P è la matrice che ha sulle colonne gli autovettori di C, D è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori di C).

PROBLEMA N. 2

1. $\overrightarrow{v_2}$ è indipendente da $\overrightarrow{v_1}$, perchè non è proporzionale a $\overrightarrow{v_1}$. $\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}\}$ è linearmente dipendente, perchè la matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 2+2i & -2+2i & -3+i \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Invece, la matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 1-i & 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, quindi $\{\overrightarrow{v_1};\overrightarrow{v_2};\overrightarrow{v_4}\}=\mathcal{B}$ è una possibile scelta di vettori di $\mathcal{A}$ che formino una base di $\mathbb{C}^3$.

2. Si può, per esempio, utilizzare l'algoritmo di Gram-Schmidt sulla base $\mathcal{B}$. Si ha:
$\overrightarrow{w_1}=\overrightarrow{v_1}$; $\overrightarrow{w_2}=\overrightarrow{v_2}$, perchè $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ sono ortogonali e hanno entrambi lunghezza 1.

Sia $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v_4}-\dfrac{\langle\overrightarrow{v_4};\overrightarrow{v_1}\rangle}{\langle\overrightarrow{v_1};\overrightarrow{v_1}\rangle}\overrightarrow{v_1}-\dfrac{\langle\overrightarrow{v_4};\overrightarrow{v_2}\rangle}{\langle\overrightarrow{v_2};\overrightarrow{v_2}\rangle}\overrightarrow{v_2}$.

$\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1-i & 1-i & 2\end{pmatrix}-(1-2i)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{1+i}{2}\end{pmatrix}-(-i)\begin{pmatrix}-\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1+i}{2}\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}1 & -i & 0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{u}$ è ortogonale a $\overrightarrow{w_1}$ e a $\overrightarrow{w_2}$. Dividendolo per la sua lunghezza, si trova
$\overrightarrow{w_3}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}$.

PROBLEMA N. 3

1. Il sistema lineare da studiare è

$$\begin{cases} x + 10y + 1492z = 0 \\ ky + 66z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}.$$

Per $k\neq 0$, la matrice dei coefficienti ha rango 3, così come la matrice completa, e quindi il sistema ammette l'unica soluzione $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Dunque, il nucleo di f_k ha dimensione 0.

Per $k=0$, la matrice dei coefficienti ha rango 2, così come la matrice completa, e quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni.

Si vede subito che $ker\,(f)=span\,\{(10;-1;0)\}$.

2. Polinomio caratteristico: $-\lambda^3+\lambda$.Gli autovalori sono: $\lambda=0$; $\lambda=1$ e $\lambda=-1$.

3. Dal teorema di Cayley-Hamilton si vede subito che $A^3=A$. Quindi, $A^4=A^2$, $A^5=A^3=A$, e così segue che tutte le potenze dispari di A sono uguali ad A stessa. Ne segue che $A^{2005}=A^{2007}=A$.

PROBLEMA N. 4

1. ${}^t(B)\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{4}{13}\end{pmatrix}$, quindi B non è ortogonale.

2. L'unico autovalore reale è $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$. Il corrispondente autospazio è $span\left\{(0;0;1)\right\}$. La matrice non è diagonalizzabile in campo reale, perchè la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali non è 3.

3. La matrice è invece invece diagonalizzabile in campo complesso. Infatti, gli autovalori complessi sono: $\lambda = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ e $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$, tutti con molteplicità geometrica 1. I corrispondenti autospazi sono:

$$\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Le matrici Q ed L sono allora

$$Q = \begin{pmatrix} -i & i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ed } L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}.$$

4.

$${}^{t}\left(B'\right) \cdot B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{13} + (?_1)^2 & \frac{6}{13} + (?_1)(?_2) \\ 0 & 0 & \frac{6}{13} + (?_1)(?_2) & \frac{9}{13} + (?_2)^2 \end{pmatrix}$$ (il prodotto si può calcolare velocemente sfruttando la struttura a blocchi).

Allora, affinchè si abbia $B' \in O(4)$, occorre che $?_1 = \pm\dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $?_2 = \mp\frac{2}{\sqrt{13}}$ con $?_1$ e $?_2$ di segno discorde. Affinchè B' sia in $SO(4)$, allora il determinante di B' deve essere 1, e quindi l'unica scelta possibile è $?_1 = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ e $?_2 = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

PROBLEMA N. 5

1. ι è lineare ed è un isomorfismo: infatti, se $\iota\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{0}$, allora deve essere $\omega\left(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{v'}\right) = 0$ per ogni $\overrightarrow{v'} \in \mathbb{R}^k$. Ma ω è non degenere, quindi $\overrightarrow{v} = 0$. Così, $Ker(\iota) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. ι, oltre ad essere iniettiva, è anche suriettiva (per il teorema della dimensione, $Im(\iota)$ ha dimensione k).

2. l'immagine di W^{ω} è $W^{\perp}$: basta applicare la definizione. Si osservi che dunque c'è isomorfismo tra il complemento simplettico ed il complemento

ortogonale di W. In particolare, $dim\,(W^{\omega}) = dim\left(W^{\perp}\right) = k - dim\,(W)$

3. Sia $W = span\,\{\overrightarrow{e}\}$. Allora, si ha $\omega\,(\overrightarrow{e};\overrightarrow{e}) = -\omega\,(\overrightarrow{e};\overrightarrow{e})$, e, quindi, $\omega\,(\overrightarrow{e};\overrightarrow{e}) = 0$. Se $\overrightarrow{w} \in W$, allora $\omega\,(\overrightarrow{w};\overrightarrow{w_1}) = 0$ per ogni $\overrightarrow{w_1} \in W$, dato che ω è bilineare e $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{w_1}$ sono multipli di $\overrightarrow{e}$.

4. $W \subseteq (W^{\omega})^{\omega}$. Infatti, se $\overrightarrow{w} \in W$, si ha $\omega\,(\overrightarrow{w};\overrightarrow{n}) = -\omega\,(\overrightarrow{n};\overrightarrow{w}) = 0$ per ogni $\overrightarrow{n} \in W^{\omega}$. Quindi, $\overrightarrow{w}$ sta anche in $(W^{\omega})^{\omega}$.

$(W^{\omega})^{\omega} \subseteq W$. Infatti, se $\overrightarrow{v} \in (W^{\omega})^{\omega}$, allora $\omega\,(\overrightarrow{m};\overrightarrow{v}) = -\omega\,(\overrightarrow{v};\overrightarrow{m}) = 0$ per ogni $\overrightarrow{m} \in W^{\omega}$. Quindi, $\overrightarrow{v}$ sta anche in W.