Geometria 1A e Algebra Lineare — 13 aprile 2007

1. Considerata la matrice reale simmetrica:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
   (a) Calcolare gli autovalori di A ed una base di ogni autospazio.
   (b) Scrivere il polinomio caratteristico della matrice A^{-3}.
   (c) Trovare una matrice B tale che $A = B^2$.

2. In $\mathbb{C}^3$, con il prodotto hermitiano standard e con la base ortonormale canonica, si considerino i vettori:
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$
   (a) Costruire una base **ortonormale** di $Span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$
   (b) Completare la base trovata ad una base **ortonormale** di $\mathbb{C}^3$
   (c) Verificare esplicitamente che la matrice U, le cui colonne sono i vettori della base trovata al punto **b,** è una matrice unitaria.

3. Si consideri la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
   (a) Mostrare che la matrice data è ortogonale.
   (b) Darne una forma diagonale come matrice complessa.
   (c) Mostrare esplicitamente che gli autospazi di A sono tra loro ortogonali rispetto al prodotto hermitiano standard di $\mathbb{C}^2$.
   (d) Calcolare A^{30}.

4. Due matrici reali e simmetriche A e B si dicono *congruenti* ($A \approx B$) se esiste una matrice reale invertibile T tale che: $B = T^t A T$
   (a) Dimostrare che la relazione di congruenza è una relazione di equivalenza.
   (b) Dimostrare che ogni matrice reale simmetrica è congruente a una matrice diagonale.
   (c) Dimostrare che A è definita positiva se e solo se è congruente alla matrice identità. *(Si consiglia di riflettere sul procedimento seguito per rispondere al punto* **c** *del primo esercizio).*

SOLUZIONI.

1. Il polinomio caratteristico di A è:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8.$$

Gli autovalori ed i rispettivi autospazi sono:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 4$$

La matrice è diagonalizzabile e quindi il polinomio caratteristico di A^{-3} si trova immediatamente dalla forma diagonale della matrice:

$$p(\lambda) = \left(\frac{1}{8} - \lambda\right)\left(\frac{1}{64} - \lambda\right) = \lambda^2 - \frac{9}{64}\lambda + \frac{1}{512}.$$

Sia ora $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice costituita dalle componenti di una base di autovettori; si ha:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = C^{-1}AC = E^2$$

Con $E = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si ottiene quindi:

$$B = CEC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}+1 & \frac{1}{2}\sqrt{2}-1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}-1 & \frac{1}{2}\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

Infatti:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}+1 & \frac{1}{2}\sqrt{2}-1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}-1 & \frac{1}{2}\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Basta applicare il procedimento di ortogonalizzazione: partiamo da $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = (i, i, 0)$, e otteniamo

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{(\vec{v}_2, \vec{w}_1)}{(\vec{w}_1, \vec{w}_1)}\vec{w}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, i\right)$$

A questo punto i vettori ottenuti sono ortogonali, ma hanno ambedue norma $\neq 1$, e quindi vanno divisi per la loro norma, ottenendo:

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ e } \vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, i\right)$$

Per completare la base si deve trovare un vettore ortogonale ad ambedue e di norma 1, ad esempio $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -i)$. La matrice

$$U = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

è unitaria, infatti:

$$UU^* = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i\sqrt{2} & -\frac{1}{2}i\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}i\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}i\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice è ortogonale:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I suoi autovalori ed i corrispondenti autospazi, considerata come matrice complessa, sono:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}, \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}$$

Un qualsiasi vettore del primo autospazio è della forma $\begin{pmatrix} -ix & x \end{pmatrix}$, mentre un qualsiasi vettore del secondo autospazio è della forma $\begin{pmatrix} iy & y \end{pmatrix}$; tali vettori sono ortogonali fra loro:

$$\begin{pmatrix} -ix & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\bar{y} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = 0$$

4. Il primi due punti sono banali verifiche. L'ultimo punto si può dimostrare come segue: se A è congruente a I, cioè $A = T^t T$, A risulta ovviamente invertibile, se poi $T^t T v = \lambda v$ si ottiene:

$$0 < (Tv, Tv) = \left(v, T^t T v\right) = (v, \lambda v) = \lambda(v, v) = \lambda \left\| v \right\|^2$$

perchè T è invertibile e $v \neq 0$. Si ha quindi $\lambda > 0$. Viceversa, il teorema spettrale per le matrici reali e simmetriche dice che A è diagonalizzabile tramite una matrice ortogonale C: $D = C^{-1}AC = C^t AC$. Se gli autovalori sono tutti strettamente positivi, sia $E^2 = D$ la matrice diagonale con sulla diagonale le radici positive degli autovalori di A. Allora si trova immediatamente:

$$A = CDC^t = CE^2C^t = CEC^tCEC^t$$

Posto $T = CEC^t$ si ha la tesi:

$$T^t T = \left(CEC^t\right)^t CEC^t = CEC^tCEC^t = A$$