Università del Piemonte Orientale – Alessandria

Algebra lineare - Corsi di Laurea in matematica e Fisica

Prova scritta del 16 maggio 2007

1. Considerata la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Trovare una base di $\ker A$ e una base di $\operatorname{Im} A$.

   (b) Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, trovare una base di $\operatorname{Im} A^t$ e una base di $(\ker A)^{\perp}$

   (c) Mostrare esplicitamente che ogni $v \in \operatorname{Im} A^t$ è ortogonale a ogni vettore di $\ker A$.

   (d) Mostrare esplicitamente che ogni $v \in \ker A^t$ è ortogonale a ogni vettore di $\operatorname{Im} A$.

2. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica e il prodotto scalare standard, si considerino i sottospazi

$$V = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   (a) Calcolare le dimensioni di $(V+W)^{\perp}$ e di $(V \cap W)^{\perp}$.

   (b) Trovare una base di $(V \cap W)$ e una di $(V \cap W)^{\perp}$.

3. Sia A una matrice complessa $n \times n$,e si prenda in $\mathbb{C}^n$ il prodotto hermitiano standard:

   (a) Mostrare che ogni $v \in \operatorname{Im} A^*$ è ortogonale a ogni vettore di $\ker A$, ovvero che:

$$\operatorname{Im}(A^*) \subseteq (\ker A)^{\perp}$$

   (b) Mostrare che ogni $v \in \ker A^*$ è ortogonale a ogni vettore di $\operatorname{Im} A$,ovvero che:

$$\ker(A^*) \subseteq (\operatorname{Im} A)^{\perp}$$

Soluzione di alcuni punti

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Base di $\ker A$:

   $$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

   Base di $\operatorname{Im} A$:

   $$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

   (b) Base di $\operatorname{Im} A^t$:

   $$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

   Base di $\ker A^t$:

   $$\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

   Base di $(\ker A)^{\perp}$:

   $$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

   (c) Per mostrare esplicitamente che ogni $v \in \operatorname{Im} A^t$ è ortogonale a ogni vettore di $\ker A$, basta verificare l'ortogonalità dei vettori delle rispettive basi trovate prima.

   (d) Per mostrare esplicitamente che ogni $v \in \ker A^t$ è ortogonale a ogni vettore di $\operatorname{Im} A$, basta verificare l'ortogonalità dei vettori delle rispettive basi trovate prima.

3. Sia A una matrice complessa $n \times n$,e si prenda in $\mathbb{C}^n$ il prodotto hermitiano standard:

   (a) Mostrare che ogni $v \in \operatorname{Im} A^*$ è ortogonale a ogni vettore di $\ker A$, ovvero che:

   $$\operatorname{Im}(A^*) \subseteq (\ker A)^{\perp}$$

   $v \in \operatorname{Im} A^*$ se $v = A^* w$; allora se $u \in \ker A$, si ha:

   $$(v, u) = (A^* w, u) = (w, Au) = (w, 0) = 0$$

(b) Mostrare che ogni $v \in \ker A^*$ è ortogonale a ogni vettore di $\operatorname{Im} A$, ovvero che:

$$\ker(A^*) \subseteq (\operatorname{Im} A)^{\perp}$$

$v \in \ker A^*$ se $A^* v = 0$, e se $u = Aw \in \operatorname{Im} A$ si ha :

$$(v, u) = (v, Aw) = (A^* v, w) = (0, w) = 0$$