Geometria 1A (algebra lineare) — 17 Luglio 2009

1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ data da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= ie_1 \\ f(e_2) &= e_1 + e_2 \\ f(e_3) &= e_1 + e_2 + ie_3 \end{aligned}$$

   (a) Sia A la matrice associata; trovare autovalori e autospazi di $A^{20} - A^{40}$

   (b) Quante soluzioni ha il sistema lineare omogeneo $(A^8 - A^4)\vec{v} = \vec{0}$? (dove $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)

2. Sia A una matrice **complessa** 8×8 con polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^8 - 2\lambda^4 + 1$

   (a) A è invertibile?

   (b) Trovare gli autovalori e le loro molteplicità algebriche.

   (c) Scrivere il polinomio caratteristico di A^4.

3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 con base $\{1, x, x^2, x^3\}$ e W lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4 con base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Cioè:

$$\begin{aligned} V &\equiv \left\{ v = a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ W &\equiv \left\{ w = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \text{ con } a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

e si consideri l'applicazione lineare f da V a W definita dalla seguente espressione:

$$f(v) = x^2 \frac{dv}{dx}$$

   (a) Descrivere nucleo e immagine di f.

   (b) Trovare, *nella base indicata*, la matrice della applicazione f.

   (c) Trovare il rango di f.

SOLUZIONI.

Esercizio 1.

La matrice è $A = \begin{pmatrix} i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ con autovettori e autovalori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow i.$$

L'unico autovalore di $A^{20} - A^{40}$ è quindi 0 con autospazio generato da:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$$

L'unico autovalore di $(A^8 - A^4)$ è 0 , con autospazio generato da:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$$

Il sistema $(A^8 - A^4)\, v = 0$ ha quindi ∞^2 soluzioni.

Esercizio 2.

(b e **a)** Essendo $p(\lambda) = \lambda^8 - 2\lambda^4 + 1$, la matrice ha per autovalori $1, -1, i, -i$ tutti con molteplicità algebrica uguale a 2 (basta porre $\lambda^4 = x$ e si trova $x^2 - 2x + 1 = 0$ cioè $x = 1$ con molteplicità uguale a 2 e quindi i valori di λ sono le quattro radici quarte di 1, ciascuna con molteplicità uguale a 2). La matrice è invertibile perchè non ammette l'autovalore 0.
(c) Gli autovalori di A^4 sono le quarte potenze degli autovalori di A. Si ottiene sempre 1 la cui molteplicità diventa quindi uguale a 8 . Il polinomio caratteristico è, quindi, $p(\lambda) = (1-\lambda)^8$.

Esercizio 3.

Il **nucleo** è costituito dai polinomi di grado zero (le costanti) e **ha dimensione uno**; **l'immagine** è lo spazio dei polinomi di grado maggiore di uno e al più quattro. Questo spazio è generato da $\{x^2, x^3, x^4\}$ ed è **di dimensione tre.**
Nelle basi assegnate l'applicazione è data da:

$$f(1) = 0$$
$$f(x) = x^2$$
$$f(x^2) = 2x^3$$
$$f(x^3) = 3x^4$$

Per cui la matrice è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che, in accordo col punto a), il rango è 3.