Geometria 1 e Geometria 1A — 20 Luglio 2011

Linee guida: *ogni affermazione che scrivete o utilizzate deve essere giustificata, o da un calcolo diretto, o da una dimostrazione, oppure dall'applicazione di un risultato trattato nel corso e adeguatamente citato. Il voto dipende anche dalla qualità delle spiegazioni, non solo dall'esattezza dei calcoli.* **Chi sostiene l'esame di Geometria 1A lo deve indicare sullo scritto.**

1. Si consideri l'insieme $A(n)$ delle matrici complesse $n \times n$ antihermitiane: $A(n) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \text{ tali che } A = -A^*\}$

- Dimostrare che sono tutte diagonalizzabili.
- Dimostrare che gli autovalori di tali matrici sono numeri immaginari puri.
- Dimostrare che ogni matrice normale $n \times n$ con gli autovalori immaginari puri appartiene a $A(n)$.
- Dimostrare che $A(n)$ è uno spazio vettoriale reale e trovare esplicitamente una base di $A(2)$.
- **(solo per chi sostiene Geometria 1)** Dimostrare esplicitamente che l'esponenziale di $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A(2)$ è una matrice di $U(2)$. Dimostrare che l'esponenziale di tutte le matrici di $A(n)$ è una matrice di $U(n)$.

2. Si consideri la matrice reale: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

- Verificare che 6 è un autovalore, trovare gli altri autovalori della matrice e scrivere il polinomio caratteristico.
- Mostrare che A è diagonalizzabile e scrivere una matrice diagonalizzante.
- Scrivere il polinomio caratteristico della matrice A^4.
- Quante soluzioni ha il sistema lineare $A^3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 27 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$?

3. **(solo per chi sostiene Geometria 1)** Considerata la matrice A dell'esercizio precedente:

- Spiegare come e perché definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$.
- Trovare, rispetto al prodotto scalare definito da A, la norma del vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e un vettore $u \neq 0$ ortogonale, rispetto al prodotto scalare definito da A, al vettore v.

SOLUZIONI.

Esercizio 1.

Le matrici antihermitiane sono diagonalizzabili perchè sono chiaramente matrici normali. Essendo matrici normali vale il teorema:

$$Av = \lambda v \Rightarrow A^* v = \overline{\lambda} v \tag{1}$$

e quindi si ha:

$$v \text{ autovettore e } \lambda v = -\overline{\lambda} v \Rightarrow \lambda = -\overline{\lambda} \tag{2}$$

Se A è normale è diagonalizzabile tramite una matrice unitaria U e la sua forma diagonale D contiene gli autovalori sulla diagonale. Se gli autovalori sono immaginari puri la matrice D verifica ovviamente: $D^* = -D$ e quindi:

$$D = U^* A U \Rightarrow D^* = U^* A^* U = -D \Rightarrow A^* = -A \tag{3}$$

$A(n)$ è uno spazio vettoriale **reale** perchè la matrice nulla è antihermitiana, l'opposta di una matrice antihermitiana è antihermitiana, la somma di matrici antihermitiane è antihermitiana e il prodotto di un numero **reale** per una matrice antihermitiana è una matrice antihermitiana.
Una matrice 2×2 antihermitiana è definita da:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t} = -\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} \tag{4}$$

da cui $a = -\overline{a}, d = -\overline{d}, c = -\overline{b}$. Quindi $a = i\alpha$ e $d = i\delta, b = \beta + i\gamma, c = -\beta + i\gamma$, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ numeri reali. Si ha allora:

$$\begin{pmatrix} i\alpha & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & i\delta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Allora le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

formano una base di $A(2)$ come spazio vettoriale reale, sono infatti un insieme di generatori e sono anche ovviamente linearmente indipendenti.
$e^{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ che è unitaria. In generale, sia $B = e^A$, abbiamo allora dalle proprietà dell'esponenziale:

$$BB^* = e^A e^{A^*} = e^{(A + A^*)} = e^0 = I \tag{6}$$

$$B^* B = e^{A^*} e^A = e^{(A^* + A)} = e^0 = I \tag{7}$$

Esercizio 2.

La matrice è: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, con autovalori e autospazi:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 3, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 6$$

Infatti il suo polinomio caratteristico è:

$$\det \begin{pmatrix} 4-z & 1 & 1 \\ 1 & 4-z & 1 \\ 1 & 1 & 4-z \end{pmatrix} = 54 - 45z + 12z^2 - z^3$$

Dividendo il polinomio caratteristico per $(6-z)$ si ottiene $\frac{54-45z+12z^2-z^3}{6-z} = z^2 - 6z + 9$ da cui si trova subito l'autovalore doppio 3 e si riconosce anche che 6 è autovalore. Il polinomio caratteristico di A^4 è $p(z) = (6^4 - z)\left((3^4 - z)\right)^2$. Gli autovalori di A sono regolari e la matrice è quindi diagonalizzabile. Una matrice diagonalizzante è data mettendo in colonna gli elementi della base di autovettori, ad esempio:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Il sistema lineare dato è l'equazione agli autovalori per l'autovalore 27 della matrice A^3. Siccome la matrice A ha l'autovalore doppio 3, la matrice A^3 possiede l'autovalore doppio 27, il suo autospazio ha dimensione 2 e quindi il sistema ha ∞^2 soluzioni.

Esercizio 3.

La matrice A definisce un prodotto scalare $(u, v) = u^t A v$ perchè è simmetrica e definita positiva avendo tutti gli autovalori strettamente positivi. La norma del vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è, per definizione:

$$\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{18} \tag{8}$$

Un vettore ortogonale a v è, ad esempio, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, infatti:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6x + 6y + 6z \tag{9}$$