Geometria 1 – 22 giugno 2010

1. Sia A una matrice **complessa** con polinomio caratteristico $p(z) = -z^5 + z$

   (a) Quali sono gli autovalori di A ?

   (b) E' invertibile ? E'diagonalizzabile ?

   (c) Quali sono gli autovalori di A^8 ?

   (d) Quale è il polinomio caratteristico di A^8 ?

   (e) Dimostrare che A^8 è diagonalizzabile.

   (f) Trovare una matrice **non diagonalizzabile** con lo stesso polinomio caratteristico di A^8

2. Fissata in $\mathbb{C}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare f definita da:

$$f(e_1) = ie_2 - e_3$$
$$f(e_2) = -ie_1 + 2e_2$$
$$f(e_3) = e_1 + 2e_3$$

   (a) Trovare una base per il nucleo e una base per l'immagine e verificare il teorema delle dimensioni.

   (b) Trovare autovalori e autospazi

   (c) E' diagonalizzabile ?

   (d) Trovare il **vettore** $f(v)$ e **l'insieme** $f^{-1}(v)$ dove $v = \frac{1}{2}e_1 + e_3$

   (e) $f^{-1}(v)$ è un sottospazio ?

3. Una matrice $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ si dice **nilpotente** se esiste un intero positivo h tale che $A^h = 0$. Il minimo tra questi numeri si dice **indice di nilpotenza**.

(a) Dimostrare che se A è nilpotente allora **necessariamente** ammette come unico autovalore 0 con molteplicità algebrica n e **viceversa**[1]**.**

(b) Dimostrare che l'indice di nilpotenza è sempre $\leq n$ e scrivere una matrice 4×4 con indice di nilpotenza 2.

(c) Dimostrare che l'unica matrice nilpotente **diagonalizzabile** è la matrice nulla.

(d) Dimostrare che se A è nilpotente di indice h allora le matrici $I - A$ e $I + A$ sono **invertibili** e trovare l'inversa[2].

---

[1] Usare Cayley-Hamilton

[2] Scomporre $I - A^h$

CENNO ALLE SOLUZIONI:

1. # Esercizio 1

Gli autovalori sono $0, 1, -1, i, -i$; non è invertibile e è diagonalizzabile, gli autovalori di A^8 sono $0, 1$; il suo polinomio caratteristico è $p(z) = -z(1-z)^4$; una matrice non diagonalizzabile è, ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. # Esercizio 2

La matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

base immagine e nucleo:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}; \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

autovettori e corrispondenti basi degli autospazi:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ -i \\ 1 \end{array} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ i \end{array} \right\} \leftrightarrow 2$$

La matrice **non è diagonalizzabile** perchè la somma delle dimensioni degli autospazi è 2 e non 3.

$$f(v) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}i \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = e_1 + \frac{1}{2}ie_2 + \frac{3}{2}e_3$$

$f^{-1}(v) = \{w \text{ tali che } f(w) = v\}$ e quindi:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iy + z \\ ix + 2y \\ -x + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow w = \left\{ \begin{array}{c} x = x \\ y = -\frac{1}{2}ix \\ z = \frac{1+x}{2} \end{array} \right\}$$

infatti:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{2}ix \\ \frac{1+x}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. # Esercizio 3

Sia A nilpotente di indice di nilpotenza h :

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v} \Rightarrow A^h\vec{v} = \alpha^h\vec{v} = 0\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$$

Quindi l'unico autovalore è lo zero e la sua molteplicità algebrica deve quindi essere n.
Se viceversa l'unico autovalore è lo zero e la sua molteplicità algebrica è n, il polinomio caratteristico della matrice è

$$p(x) = (-1)^n x^n$$

e quindi per il teorema di Cayley-Hamilton la matrice A soddisfa l'equazione $(-1)^n A^n = 0 \Rightarrow A^n = 0$ e quindi è nilpotente con indice di nilpotenza $\leq n$.
Una matrice che risponde al quesito è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se una matrice nilpotente $n \times n$ è diagonalizzabile, significa che l'autovalore 0 deve essere regolare, ovvero avere molteplicità geometrica n, ovvero il nucleo della matrice deve avere dimensione n, ovvero il rango della matrice deve essere 0.
Le due matrici sono invertibili perchè 1 e -1 **non sono autovalori.** Per l'inversa di $I - A$ basta eseguire la scomposizione:

$$I = I - A^h = (I - A)(A^{h-1} + A^{h-2} + A^{h-3} + ... + I)$$

e quindi

$$(I - A)^{-1} = (A^{h-1} + A^{h-2} + A^{h-3} + ... + I)$$

L'inversa di $I + A$ invece si trova con la sostituzione $A \to -A$ nella formula precedente, si ricava quindi:

per **h** pari, $(I + A)^{-1} = (-A^{h-1} + A^{h-2} - A^{h-3} + ... + I)$.

per **h** dispari, $(I + A)^{-1} = (A^{h-1} - A^{h-2} + A^{h-3} - .... + I)$.