Geometria 1 — 24 Settembre 2010

1. Sia A una matrice **normale** $n \times n$ complessa, e si consideri in $\mathbb{C}^n$ il prodotto hermitiano standard.

   (a) Dimostrare che $\ker A = \ker A^*$

   (b) Dimostrare che l'ipotesi di normalità è essenziale trovando un controesempio (lavorare con matrici 2×2).

   (c) Dimostrare che $\ker A$ è ortogonale a $\operatorname{Im} A$

   (d) Dimostrare che una matrice unitaria che diagonalizza A diagonalizza anche A^*

   (e) Dimostrare che se A ha tutti gli autovalori reali allora è hermitiana.

2. Sia U una matrice unitaria e si consideri la matrice B definita da:

   $$B = U - kI$$

   dove k è un parametro complesso e I la matrice identità.

   (a) Per che valori di k la matrice B è diagonalizzabile per ogni scelta di U ?

   (b) Per che valori di k la matrice B è invertibile per ogni scelta di U ?

3. Considerata la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Mostrare che è diagonalizzabile e scrivere una forma diagonale.

   (b) Per quali valori di k il vettore $v = ke_1 + k^2 e_2 + k^3 e_3$ appartiene all'immagine della matrice ?

Cenno alle soluzioni:

Esercizio 1.

Si deve mostrare che ogni vettore del nucleo di A sta nel nucleo di A^* e viceversa. Se $v \in \ker A$ si ha:

$$\|A^*v\|^2 = (A^*v, A^*v) = (v, AA^*v) = (v, A^*Av) = (v, 0) = 0$$

E quindi $A^*v = 0$. Analogamente, se $v \in \ker A^*$ si ha:

$$\|Av\|^2 = (Av, Av) = (v, A^*Av) = (v, AA^*v) = (v, 0) = 0$$

E quindi $Av = 0$. **L'ipotesi di normalità** $AA^* = A^*A$ **è essenziale**, infatti considerando la matrice **non normale** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si ha:

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per dimostrare l'ortogonalità, sia $v \in \ker A$ e $w = Au \in \operatorname{Im} A$, si ha:

$$(w, v) = (Au, v) = (u, A^*v) = (u, 0) = 0 \text{ (per il primo punto dell'esercizio)}$$

Se una matrice U **unitaria** diagonalizza A si ha:

$$D = U^*AU \Rightarrow D^* = UA^*U^*$$

Se A ha tutti gli autovalori reali, essendo diagonalizzabile tramite una matrice unitaria in quanto normale, ha una forma diagonale D **reale**, e quindi:

$$A = UDU^* \Rightarrow A^* = (UDU^*)^* = UD^*U^* = UDU^* = A$$

Esercizio 2.

La matrice $B = U - kI$ è normale:

$$\begin{aligned} BB^* &= (U - kI)(U - kI)^* = (U - kI)\left(U^* - \overline{k}I\right) = UU^* - kU^* - \overline{k}U + k\overline{k}I \\ B^*B &= (U - kI)^*(U - kI) = \left(U^* - \overline{k}I\right)(U - kI) = U^*U - kU^* - \overline{k}U + k\overline{k}I \end{aligned}$$

E quindi $BB^* = B^*B$ e allora essendo normale è diagonalizzabile sempre per ogni valore di k. Per l'invertibilità si deve porre:

$$\det B = \det (U - kI) \neq 0$$

Allora k **non deve essere autovalore di** U. Gli autovalori delle matrici unitarie sono numeri complessi di modulo 1 e quindi B è invertibile $\forall U$ se $|k| \neq 1$.

Esercizio 3.

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 1 e quindi la dimensione del nucleo è 2; l'autovalore $\lambda = 0$ è quindi **regolare**. Osservando che

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si vede subito che 6 è un altro autovalore; la sua molteplicità è 1, anche questo autovalore è **regolare** e quindi la matrice è diagonalizzabile. L'immagine è ovviamente l'autospazio dell'autovalore 6; il vettore dato appartiene all'autospazio dell'autovalore 6 quando

$$k = k^2 = k^3$$

ovvero $k = 0, 1$.