Geometria 1A e Algebra Lineare — 25 luglio 2006

1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ data, nella base canonica, da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -ie_3 \\ f(e_2) &= ie_3 \\ f(e_3) &= ie_1 - ie_2 \end{aligned}$$

   (a) Sia A la matrice associata; trovarne autovalori e autospazi.

   (b) Mostrare che A è hermitiana e scrivere una matrice **unitaria** che la diagonalizzi.

2. Sia A una matrice complessa 2×2 tale che $A^2 = -\,I$

   (a) E' invertibile?

   (b) Scrivere tutti i possibili polinomi caratteristici per A

   (c) Scrivere una matrice di questo tipo diagonalizzabile e una non diagonalizzabile.

   (d) Scrivere una matrice di questo tipo con tutti gli elementi reali.

   (e) Ripetere il punto **(b)** nel caso in cui la matrice sia 4×4.

3. *PER STUDENTI DI MATEMATICA*:

   E' noto che una matrice unitaria è normale e ha tutti gli autovalori di modulo 1. Dimostrare il viceversa: una matrice normale con tutti gli autovalori di modulo 1 è unitaria.

SOLUZIONI.

1. La matrice associata A è:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}$$
Gli autovalori sono $0, \pm\sqrt{2}$, ed i rispettivi autospazi sono generati da:
$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ 1 \end{array} \right\} \leftrightarrow \sqrt{2}, \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ 1 \end{array} \right\} \leftrightarrow -\sqrt{2}$$
La matrice è hermitiana e quindi diagonalizzabile (quest'ultimo fatto si vede anche perchè tutti gli autovalori sono distinti). Una matrice diagonalizzante è, ad esempio:
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\sqrt{2} & -\frac{1}{2}i\sqrt{2} & 1 \\ -\frac{1}{2}i\sqrt{2} & \frac{1}{2}i\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Tale matrice non è immediatamente unitaria, ma basta normalizzarne le colonne:
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Gli autovalori possibili sono solo $\pm i$, infatti da
$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$
segue:
$$AA\vec{v} = A\lambda\vec{v} = \lambda^2\vec{v} = -I\vec{v} = -\vec{v}$$
da cui: $\lambda^2 = -1$. Le matrici di questo tipo sono sempre invertibili perchè non possono mai presentare l'autovalore 0, i possibili polinomi caratteristici sono:
$$\begin{array}{l} (\lambda - i)(\lambda + i) \\ (\lambda - i)^2 \\ (\lambda + i)^2 \end{array}$$
Una matrice diagonalizzabile è, ad esempio:
$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$
Una non diagonalizzabile è:
$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$
Una con elementi tutti reali è:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nel caso 4×4 le possibilità per i polinomi caratteristici sono:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda - i)^4 \\
&(\lambda + i)^4 \\
&(\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 \\
&(\lambda - i) (\lambda + i)^3 \\
&(\lambda - i)^3 (\lambda + i)
\end{aligned}
$$

3. Sia A la matrice **normale** data; in quanto normale è diagonalizzabile tramite una matrice unitaria U :

$$D = U^* A U$$

I suoi autovalori hanno però **modulo 1** per ipotesi, e quindi la matrice diagonale D verifica: $DD^* = I$ e quindi è unitaria. Ma $A = UDU^*$ e quindi A è unitaria in quanto prodotto di matrici unitarie.