Geometria 1A – Algebra Lineare 26 Giugno 2008

1. Sia $V = \left\{ A \in M(2 \times 2, \mathbb{C}) \text{ tali che } A + A^{\dagger} = 0, trA = 0 \right\}$ dove si definisce:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\dagger} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

   (a) Dimostrare che V è uno spazio vettoriale reale.

   (b) Calcolare la dimensione di V come spazio vettoriale reale.

   (c) Dare una base di V.

2. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base (e_1, e_2, e_3) e l'applicazione lineare data da:

$$\begin{gathered} f(e_1) = ke_1 + e_3 \\ f(e_2) = ke_2 \\ f(e_3) = ke_1 + ke_3 \end{gathered}$$

   (a) Trovare i valori di k per cui l'applicazione è invertibile.

   (b) Trovare i valori di k per cui l'applicazione è diagonalizzabile.

3. Sia A la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Trovare una base del nucleo e una dell'immagine.

   (b) Mostrare che A è diagonalizzabile e darne una forma diagonale.

   (c) Scrivere il polinomio caratteristico della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n \\ . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & ... & . \\ 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n \end{pmatrix}$$

Soluzioni.

1. (a) La matrice nulla verifica la condizione, la somma di matrici che verificano la condizione la verifica, e se una matrice A verifica la condizione la matrice aA con a **reale** la verifica.

   (b) Le matrici di V sono della forma : $\begin{pmatrix} ix & y-iz \\ y+iz & -ix \end{pmatrix}$ con x, y, z numeri reali. Lo spazio ha dimensione tre, una base è, ad esempio:

$$A_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

2. La matrice associata è $\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$; è quindi invertibile se il suo determinante $k^3 - k^2 \neq 0$, cioè $k \neq 0, 1$. Per quanto riguarda la diagonalizzabilità, gli autovalori sono

$$k, k - \sqrt{k}, k + \sqrt{k}.$$

   Innanzi tutto deve essere quindi $k \geq 0$. La matrice è diagonalizzabile per $k \neq 0$ perchè gli autovalori sono tutti reali e distinti. Per $k = 0$ la matrice è non diagonalizzabile perchè l'autovalore **triplo** 0 non è regolare, perchè la matrice ha rango 1.

3. Analizziamo il caso generale del punto c. Il rango è 1 e quindi la dimensione del nucleo è $n-1$. L'autovalore 0 è quindi regolare. L'altro autovalore si trova subito osservando che $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore:

$$Av = (1 + 2 + 3 + ... + n)v$$

   quindi l'autovalore è:

$$(1 + 2 + 3 + ... + n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   Questo autovalore ha molteplicità algebrica 1 e quindi è anch'esso regolare. La matrice è diagonalizzabile, il suo polinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{n-1} \left(\frac{n(n+1)}{2} - \lambda \right)$$