Università del Piemonte Orientale – Alessandria

Algebra lineare - Corsi di Laurea in matematica e Fisica

PROVA SCRITTA DEL 26 LUGLIO 2007

1. Considerata la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

   (a) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine

   (b) Dire se A è diagonalizzabile.

   (c) Scrivere il polinomio caratteristico della matrice $B = A^3$

2. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base (e_1, e_2, e_3) e l'applicazione lineare data da:

$$\begin{gathered} f(e_1) = e_1 + e_3 \\ f(e_2) = e_2 \\ f(e_3) = ke_1 + e_3 \end{gathered}$$

   (a) Trovare i valori di k per cui l'applicazione è invertibile.

   (b) Trovare i valori di k per cui l'applicazione è diagonalizzabile.

3. Fissato in $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare standard $(,)$ e un vettore u **di norma** 1, si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ data da:

$$f(v) = v - 2(v, u)u$$

   (a) Dimostrare che è lineare.

   (b) Dimostrare che f ammette l'autovalore -1 e trovare il corrispondente autospazio.

   (c) Dimostrare che, $\forall v,\ f^2(v) = v$.

   (d) Dimostrare che f è una trasformazione ortogonale (cioè preserva il prodotto scalare).

Soluzione di alcuni punti.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, basi degli autospazi e corrispondenti autovalori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 8$$

   (a) La matrice non è invertibile perchè ha l'autovalore 0.

   (b) La matrice è diagonalizzabile perchè tutti gli autovalori sono reali e regolari.

   (c) Il polinomio caratteristico di B è $p(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 512)^2$.

2. La matrice associata è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con autovalori $1, \sqrt{k} + 1, 1 - \sqrt{k}$. La matrice è invertibile per $k \neq 1$. La matrice è diagonalizzabile per $k > 0$ perchè gli autovalori sono tutti reali e distinti. Per $k < 0$ non è diagonalizzabile perchè due autovalori sono complessi, e per $k = 0$ si vede subito che non è diagonalizzabile perchè l'unico autovalore 1 non è regolare.

3. Per la linearità basta osservare che discende dalla linearità del prodotto scalare. Scriviamo l'equazione agli autovalori:

$$f(v) = v - 2(v, u)u = \lambda v$$

   Ne consegue subito che u e v devono essere proporzionali, posto $v = \alpha u$ si ottiene:

$$\alpha u - 2(\alpha u, u) = \lambda \alpha u$$

   Cioè $v = u$ e $\lambda = -1$. Infatti, per verifica:

$$f(u) = u - 2(u, u)u = u - 2u = -u$$

   L'ortogonalità è solo una banale verifica. Volendo si poteva dimostrare tutto molto semplicemente scrivendo la matrice associata in una base opportuna; prendiamo una base ortonormale $(e_1, e_2, ...e_n)$ in cui $e_1 = u$. Si ha subito:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -e_1 \\ f(e_2) &= e_2 \\ f(e_n) &= e_n \end{aligned}$$

   da cui la matrice associata è diagonale con sulla diagonale -1 e $n - 1$ volte il numero 1:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$