Geometria 1A e Algebra Lineare — 28 giugno 2006

1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da:

$$
\begin{aligned}
f(e_1) &= -e_1 \\
f(e_2) &= 2e_1 + e_2 \\
f(e_3) &= 3e_1 + e_2 - e_3
\end{aligned}
$$

   (a) Sia A la matrice associata; trovarne autovalori e autospazi e discuterne la diagonalizzabilità.

   (b) Trovare gli autovalori e scrivere il polinomio caratteristico di $B = A^8 + A^5$

   (c) Trovare un vettore $v \neq 0$ tale che $Bv = 0$

2. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il sottospazio $V = span\,\{v, u\}$

   (a) Trovare un base del sottospazio $V^{\perp}$ortogonale a V rispetto al prodotto scalare usuale di $\mathbb{R}^4$

   (b) Scrivere, nella base canonica di $\mathbb{R}^4$, la matrice di una qualsiasi applicazione lineare che abbia come immagine $V^{\perp}$ e come nucleo V

3. Sia A una matrice **complessa** 6×6 con polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^6 - \lambda^2$.

   (a) Trovare il rango di A affinchè sia diagonalizzabile.

   (b) Scrivere il polinomio caratteristico di A^4

   (c) Scrivere una matrice **non** diagonalizzabile con lo stesso polinomio caratteristico di A^4.

4. *ESERCIZIO PER STUDENTI DI MATEMATICA*:

   E' noto che una matrice hermitiana è normale e ha tutti gli autovalori reali. Dimostrare il viceversa: una matrice normale con tutti gli autovalori reali è hermitiana.

SOLUZIONI.

1. Il polinomio caratteristico di A è:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2.$$

Gli autovalori ed i rispettivi autospazi sono:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$$

La matrice **non** è diagonalizzabile perchè l'autovalore -1 non è regolare. La matrice B ha come autovalori $1^8 + 1^5 = 2$ e $(-1)^8 + (-1)^5 = 0$, e come polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \lambda^2(2-\lambda),$$

Se v è nell'autospazio di -1 di A si vede subito che appartiene all'autospazio di 0 di B

2. I vettori di $V^\perp$, indicati qui con (a,b,c,d) devono essere ortogonali ai vettori di V; si ottiene subito

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ b+c+d &= 0 \end{aligned}$$

da cui, sottraendo, $a = d = -b-c$. Una base di $V^\perp$ è quindi, ad esempio:

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Una matrice con le proprietà richieste si trova, ad esempio, mettendo nelle prime due colonne i vettori della base di $V^\perp$ e imponendo poi le equazioni:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & a & b \\ 1 & 0 & c & d \\ 0 & 1 & e & f \\ -1 & -1 & g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+a \\ 1+c \\ 1+e \\ -2+g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & a & b \\ 1 & 0 & c & d \\ 0 & 1 & e & f \\ -1 & -1 & g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+a+b \\ c+d \\ 1+e+f \\ -1+g+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene subito:

$$a = 2, c = -1, e = -1, g = 2, b = -1, d = 1, f = 0, h = -1.$$

3. Gli autovalori sono $0, \pm 1, \pm i$. L'unico autovalore *a priori* non regolare è 0, perchè ha molteplicità algebrica 2.Se però il nucleo della matrice ha dimensione 2, e quindi il rango è 4, anche 0 è regolare e la matrice è diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico di A^4 è $p(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)^4$. Sia ora B una qualsiasi matrice 6×6 con polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)^4$; gli autovalori sono: 0 con molteplicità algebrica 2, e 1 con molteplicità algebrica 4.Per essere diagonalizzabile gli autovalori devono essere regolari. Basta quindi scrivere una matrice triangolare con sulla diagonale gli autovalori dati e col nucleo di dimensione 1, cioè di rango 5, per essere certi che ha lo stesso polinomio caratteristico di A^4 , ma non è diagonalizzabile. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Sia A la matrice **normale** data; in quanto normale è diagonalizzabile tramite una matrice unitaria U :

$$D = U^*AU$$

I suoi autovalori sono però **reali** per ipotesi, e quindi la matrice diagonale D è reale. Si ottiene quindi $D = D^*$. Essendo:

$$D^* = (U^*AU)^* = U^*A^*U$$

si ha:

$$U^*A^*U = U^*AU$$

E quindi la tesi $A^* = A$, perchè U è invertibile.