Università del Piemonte Orientale – Alessandria

Algebra lineare - Corsi di Laurea in matematica e Fisica

Prova scritta del 28 giugno 2007

1. Considerata la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Dire se A è invertibile.

   (b) Trovare il polinomio caratteristico di A.

   (c) Dire se A è diagonalizzabile.

2. Fissata in $\mathbb{R}^3$ una base ortonormale (e_1, e_2, e_3) e il prodotto scalare standard, si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da:

$$\begin{gathered} f(e_1) = \tfrac{1}{2}e_1 + \tfrac{1}{2}e_3 \\ f(e_2) = e_2 \\ f(e_3) = \tfrac{1}{2}e_1 + \tfrac{1}{2}e_3 \end{gathered}$$

   (a) Dimostrare che $f^2 = f$

   (b) Detta A la matrice associata a f nella base assegnata, trovare una forma diagonale di A e una matrice diagonalizzante.

   (c) Trovare una base **ortonormale** di autovettori di A.

   (d) Trovare una matrice B **ortogonale** che diagonalizza A

3. Sia A una matrice reale $n \times n$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri la matrice $B = A^2 - \alpha^2 I$.

   (a) Mostrare che se α è autovalore di A, allora B non è invertibile.

   (b) E' vero il viceversa?

Soluzione.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, basi degli autospazi e corrispondenti autovalori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 4$$

   (a) La matrice non è invertibile perchè ha l'autovalore 0.

   (b) La matrice non è diagonalizzabile perchè l'autovalore doppio 0 non è regolare.

   (c) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 2)(\lambda - 4)$.

2. La matrice associata è $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ con basi degli autospazi e corrispondenti autovalori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$$

   Una matrice diagonalizzante è, ad esempio:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   I vettori colonna sono autovettori, sono ortogonali fra loro ma **non sono di norma** 1 e quindi per trovare una base ortonormale di autovettori basta normalizzarli:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$$

   La matrice:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

   è quindi **diagonalizzante** (perchè le sue colonne formano una base di autovettori) e **ortogonale** (perchè le colonne sono ortonormali per costruzione).

3. Basta osservare che $B = A^2 - \alpha^2 I = (A - \alpha I)(A + \alpha I)$, per cui se α è autovalore di A si ha $\det(A - \alpha I) = 0$ e quindi $\det B = 0$. Il viceversa **non** è vero perchè

$$\det B = \det((A - \alpha I)(A + \alpha I)) = \det(A - \alpha I) \det(A + \alpha I) = 0$$

   non implica necessariamente che $\det(A - \alpha I) = 0$; infatti è soddisfatta anche se $\det(A + \alpha I) = 0$ ma $\det(A - \alpha I) \neq 0$ (e quindi $-\alpha$ e non α è autovalore di A).