Geometria 1 — 28 Settembre 2011

Linee guida: *ogni affermazione che scrivete o utilizzate deve essere giustificata, o da un calcolo diretto, o da una dimostrazione, oppure dall'applicazione di un risultato trattato nel corso e adeguatamente citato. Il voto dipende anche dalla qualità delle spiegazioni, non solo dall'esattezza dei calcoli.* **Chi sostiene invece l'esame di Geometria 1A lo deve indicare sullo scritto.**

1. Si consideri l'insieme $H(n)$ delle matrici complesse $n \times n$ hermitiane:

$$H(n) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \text{ tali che } A = A^*\} \tag{1}$$

   - Mostrare che se $A, B \in H(n)$ non necessariamente $AB \in H(n)$.
   - Trovare una condizione necessaria e sufficiente sulle matrici $A, B \in H(n)$ affinchè $AB \in H(n)$.
   - Dimostrare che $H(n)$ è uno spazio vettoriale reale e trovare esplicitamente una base di $H(2)$.
   - **(per chi sostiene Geometria 1).** Dimostrare che se $A \in H(n)$ e v è un vettore non nullo, se $A^2 v = 0$ allora $Av = 0$
   - **(per chi sostiene Geometria 1).** Dimostrare che se $A \in H(n)$ e v è un vettore non nullo, se $A^3 v = 0$, allora $Av = 0$

2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2 con base $\{1, x, x^2\}$:

$$V \equiv \left\{p(x) = a + bx + cx^2 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \tag{2}$$

   . Nello spazio V si consideri il seguente prodotto scalare:

$$(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

   - Trovare un polinomio ortogonale al polinomio $1 + x$.
   - Trovare una base per il sottospazio ortogonale al polinomio $1 + x$
   - **(per chi sostiene Geometria 1).** Scrivere la matrice del prodotto scalare assegnato

3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   - Si dica perchè è diagonalizzabile e si scriva una forma diagonale.
   - Trovare una base del nucleo e una dell'immagine.
   - **(per chi sostiene Geometria 1).** La matrice A può rappresentare un prodotto scalare in $\mathbb{R}^4$?

Cenno alle soluzioni.

Esercizio n.1

Per il primo punto basta un qualsiasi controesempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ che non è hermitiana.}$$

Una condizione ovviamente necessaria e sufficiente è che le due matrici commutino tra loro: $AB = BA$.
Una qualsiasi matrice di $H(2)$ è del tipo:

$$\begin{pmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d \text{ reali.}$$

Una base reale di $H(2)$ è quindi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Se $A^2v = 0$, oppure $A^3v = 0$ basta calcolare (tenendo conto che $A^* = A$):

$$\begin{gathered} (Av, Av) = (v, A^*Av) = \left(Av, A^2v\right) = 0 \;\Rightarrow Av = 0 \\ \left(A^2v, A^2v\right) = \left(Av, A^*A^2v\right) = \left(Av, A^3v\right) = 0 \;\Rightarrow\; A^2v = 0 \;\Rightarrow Av = 0 \end{gathered}$$

Esercizio n.2

Si deve porre:

$$(1+x, q(x)) = \int_{-1}^{1} (1+x)\, q(x) dx = 0$$

Posto $q(x) = ax^2 + bx + c$ si deve avere:

$$\int_{-1}^{1} (1+x)\, q(x) dx = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + 2c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b$$

Un polinomio ortogonale è, ad esempio, $x^2 - x$, infatti:

$$\int_{-1}^{1} (1+x)\left(x^2 - x\right) dx = 0$$

Il sottospazio ortogonale è bidimensionale e ha come base, ad esempio, i polinomi:

$$\left(x^2 - x\right), (3x-1)$$

La matrice è:

$$\begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} dx = 2 & \int_{-1}^{1} x dx = 0 & \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \\ \int_{-1}^{1} x dx = 0 & \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} & \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \\ \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} & \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 & \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Esercizio n.3

Autovalori e basi degli autospazi:

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 0, \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -2, \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 4$$

La matrice è diagonalizzabile perchè è simmetrica e anche perchè si vede che tutti gli autovalori sono regolari. Il nucleo ha dimensione 1 e una base dell'immagine è data, ad esempio, da tre colonne indipendenti:

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Non può rappresentare un prodotto scalare perchè non è definita positiva, avendo un autovalore nullo.