Geometria 1A e Algebra Lineare — 3 luglio 2009

1. Fissata in $\mathbb{C}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - ie_2 + (1-i)e_3 \\ f(e_2) &= ie_1 + e_2 + (1+i)e_3 \\ f(e_3) &= (1+i)e_1 + (1-i)e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

   (a) Trovare una base per il nucleo.

   (b) Trovare una base per l'immagine.

   (c) Trovare gli autovalori e gli autospazi della matrice associata.

   (d) E' diagonalizzabile?

   (e) E' hermitiana?

2. Sia A una matrice complessa quadrata di 11 righe e 11 colonne e sia

$$p(\lambda) = -\lambda^6(\lambda^2 - 2)(\lambda^3 - 3)$$

   il suo polinomio caratteristico. Si dimostri che A è diagonalizzabile se e solo se il suo rango è 5.

3. Considerata la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

   a. Mostrare che il vettore $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine della matrice.

   b. Trovare gli autovalori.

   c. Mostrare che A è diagonalizzabile

   d. Mostrare che la matrice $B = A^2 - I$ è invertibile.

SOLUZIONI DI ALCUNI PUNTI

1. La matrice della applicazione è: $\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 1-i \\ 1-i & 1+i & 2 \end{pmatrix}$

Gli autovalori sono: $0, 0, 4$ e gli autospazi hanno come basi:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 4, \left\{ \begin{pmatrix} -1-i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0.$$

La matrice risulta diagonalizzabile perchè tutti gli autovalori sono regolari.
La base del nucleo è quella dell'autospazio dell'autovalore zero.

Una base per l'immagine è data da una colonna della matrice, ad esempio, $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1-i \end{pmatrix}$.

2. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -\lambda^6(\lambda^2 - 2)(\lambda^3 - 3)$ per cui gli autovalori sono le **due** radici quadrate di 2, (ciascuna con molteplicità algebrica uguale a 1), le **tre** radici terze di 3 (ciascuna con molteplicità algebrica uguale a 1), e 0 (quest'ultimo con molteplicità algebrica uguale a 6). Se la matrice ha rango 5, il nucleo ha dimensione $11-5=6$ e quindi anche l'autovalore 0 risulta regolare e la matrice è diagonalizzabile. Se la matrice è diagonalizzabile, la sua forma diagonale contiene 6 volte il numero 0 sulla diagonale principale e quindi la matrice (avendo 6 righe tutte di zeri) ha rango uguale a $11-6=5$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ha rango 1 e quindi la dimensione del nucleo è 2; l'autovalore $\lambda = 0$ è quindi **regolare**. Osservando che

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si vede subito che 12 è un altro autovalore, la sua molteplicità è 1, anche questo autovalore è **regolare** e quindi la matrice è diagonalizzabile.