Geometria 1 e Geometria 1A — 6 Luglio 2011

Linee guida: *ogni affermazione che scrivete o utilizzate deve essere giustificata, o da un calcolo diretto, o da una dimostrazione, oppure dall'applicazione di un risultato trattato nel corso e adeguatamente citato. Il voto dipende anche dalla qualità delle spiegazioni, non solo dall'esattezza dei calcoli.* **Chi sostiene l'esame di Geometria 1A lo deve indicare sullo scritto.**

1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ che, nella base e_1, e_2, e_3 verifica:

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2) &= (i+1)\, e_1 + e_2 \\ f(e_1 - e_2) &= (i-1)\, e_1 - e_2 \\ f(e_3) &= e_1 + e_2 + ie_3 \end{aligned}$$

   (a) Sia A la matrice associata; trovare gli autovalori e gli autovettori di A e di $B = A^4 - I$ e i polinomi caratteristici.

   (b) Studiare la diagonalizzabilità di A e di B.

   (c) **(solo per chi sostiene Geometria 1)** Trovare il polinomio minimo e scrivere la forma canonica delle matrici A e B.

   (d) Quante soluzioni ha il sistema lineare omogeneo $B^2\vec{v} = \vec{0}$? (dove $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)

2. Siano A, B matrici complesse quadrate $n \times n$ tali che $A^2 = 0$ e $B^3 = 0$

   (a) Supponendo che $A, B \neq 0$ dimostrare che non sono diagonalizzabili.

   (b) Dimostrare che le matrici $A \pm I$ e $B \pm I$ sono invertibili e scrivere esplicitamente le inverse.

3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2 con base $\{1, x, x^2\}$:

$$V \equiv \left\{ p(x) = a + bx + cx^2 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

e si consideri l'applicazione lineare f da V a V definita dalla seguente espressione:

$$f(p(x)) = x\frac{dp(x)}{dx}$$

(a) Descrivere nucleo e immagine di f.

(b) Trovare, *nella base indicata*, la matrice A della applicazione f.

(c) **(solo per chi sostiene Geometria 1)** Nello spazio V si consideri la seguente forma bilineare: $(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Mostrare che è un prodotto scalare e trovarne la matrice associata B.

(d) **(solo per chi sostiene Geometria 1)** Impostare un procedimento per calcolare l'aggiunta di f rispetto al prodotto scalare dato. Verificare, applicando la definizione di aggiunta, che $f^*(1) = 2 - 24x + 30x^2$

SOLUZIONI.

Esercizio 1.

La matrice associata è $A = \begin{pmatrix} i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ con autovettori e autovalori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow i.$$

L'unico autovalore di $B = A^4 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2-2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è 0 con autospazio generato da:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$$

Le matrici A e B non sono quindi diagonalizzabili. Il polinomio caratteristico di B è $-x^3$ e il polinomio minimo è x^2. Il polinomio caratteristico di A è $(1-x)(i-x)^2$ e il suo polinomio minimo è $(x-1)(i-x)^2$. Il sistema $B^2 v = 0$ ha ∞^3 soluzioni perchè $B^2 = 0$.
Il nucleo della matrice B ha dimensione 2 e quindi la sua forma canonica è:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Il nucleo della matrice $A - iI$ ha dimensione 1 e quindi la forma canonica di A è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \tag{2}$$

Esercizio 2.

A e B, matrici $n \times n$, possono avere solo l'autovalore zero; se sono diagonalizzabili tale autovalore deve essere regolare, ovvero il nucleo deve avere dimensione n, ovvero devono essere la matrice nulla. Per l'invertibilità basta osservare che:

$$(A+I)(A-I) = A^2 - I = -I$$

e quindi

$$\det (A \pm I) \neq 0$$

Le inverse sono:

$$(A+I)^{-1} = I - A$$
$$(A-I)^{-1} = -A - I$$

Per l'invertibilità basta osservare che l'unico autovalore possibile per B è lo zero e quindi $\det(B \pm I) \neq 0$. Per scrivere esplicitamente le inverse basta osservare che, se $x^3 = 0$ si ha:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2$$
$$\frac{1}{x-1} = -1 - x - x^2$$

e quindi:

$$(B+I)^{-1} = I - B + B^2$$
$$(B-I)^{-1} = -I - B - B^2$$

Esercizio 3.

Il nucleo è costituito dai polinomi di grado zero (le costanti) e dal polinomio zero, e ha dimensione uno; l'immagine è lo spazio dei polinomi di grado maggiore o uguale a uno e al più due. Questo spazio è generato da $\{x, x^2\}$ ed è di dimensione due.
Nelle basi assegnate l'applicazione è data da:

$$f(1) = 0$$
$$f(x) = x$$
$$f(x^2) = 2x^2$$

Per cui la matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che, in accordo col punto a), il rango è 2.
E' un prodotto scalare perchè è una forma bilineare definita positiva:

$$(p(x), p(x)) = \int_0^1 p(x)^2 dx \geq 0 \text{ e } = 0 \text{ solo per } p(x) = 0 \tag{3}$$

La matrice del prodotto scalare si trova facilmente dalla definizione:

$$\int_0^1 dx = 1, \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}, \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$$

da cui:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Per un calcolo svolto a lezione si ha: (il calcolo effettivo è molto noioso e non era richiesto)

$$A^* = B^{-1} A^t B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -24 & -26 & -24 \\ 30 & 30 & 27 \end{pmatrix} \tag{4}$$

La verifica richiesta si fa applicando la definizione di aggiunta:

$$(f\left(p(x)\right), q(x)) = (p(x), f^*\left(q(x)\right)) \tag{5}$$

Infatti, posto $p(x) = a1 + bx + cx^2$, si ha, sugli elementi della base, cioè grado per grado:

$$(f\left(1\right), 1) = \int_0^1 0dx = 0 \text{ e anche } (1, f^*\left(1\right)) = \int_0^1 \left(2 - 24x + 30x^2\right) dx = 0 \tag{6}$$

$$(f(x), 1) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \text{ e anche } (x, f^*\left(1\right)) = \int_0^1 x\left(2 - 24x + 30x^2\right) dx = \frac{1}{2} \tag{7}$$

$$\left(f\left(x^2\right), 1\right) = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3} \text{ e anche } \left(x^2, f^*\left(1\right)\right) = \int_0^1 x^2\left(2 - 24x + 30x^2\right) dx = \frac{2}{3} \tag{8}$$