AUTOVALORI E AUTOVETTORI.

Sia A una matrice **quadrata** di ordine n reale (o complessa) e v un vettore colonna.

Se $Av = \lambda v$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) e $v \neq 0$, allora λ è detto **autovalore** di A e v è l'**autovettore** corrispondente a λ. Si indica con V_λ l'**autospazio** di λ, cioè

$$V_\lambda = \{v : Av = \lambda v\} \cup \{0\}.$$

V_λ include tutti gli autovettori ed anche il vettore nullo ed è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (o di $\mathbb{C}^n$).

OSSERVAZIONI (importanti!).

1) Se λ è un autovalore di A con autovettore v, allora λ^m è un autovalore di A^m **con gli stessi autovettori**, per ogni m intero positivo. Infatti, per $m = 2$,

$$A^2 v = AAv = A\lambda v = \lambda A v = \lambda\lambda v = \lambda^2 v.$$

Allo stesso modo si procede per m generico. Se A è invertibile, lo stesso vale per ogni m intero negativo.

2) Autospazi di autovalori distinti hanno in comune solo il vettore nullo, cioè **autovettori di autovalori distinti sono indipendenti**. Infatti, se

$$v \in V_\lambda \text{ e } v \in V_\mu \Rightarrow Av = \lambda v \text{ e } Av = \mu v \Rightarrow (\lambda - \mu)\, v = 0$$

ma $\lambda \neq \mu \Rightarrow v = 0$.

Come si trovano autovalori e autovettori.

$Av = \lambda v$ con $v \neq 0$ si può riscrivere come $(A - \lambda I)\, v = 0$, che è un sistema lineare omogeneo con soluzioni non banali $v \neq 0$ se e solo se

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}.$$

Quest'ultima è l'**equazione degli autovalori**. (Può accadere che una o più soluzioni siano complesse; in questo caso **non** sono autovalori se si considerano matrici reali che operano su $\mathbb{R}^n$. Invece, tutte le matrici complesse che operano su $\mathbb{C}^n$ hanno autovalori).

Indichiamo con $P(\lambda)$ la seguente espressione:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

$P(\lambda)$ è un polinomio in λ, detto **polinomio caratteristico** di A, ed ha grado n. Si può verificare subito che il coefficiente di λ^n è $(-1)^n$, mentre il termine noto è $\det A$ (infatti, il termine noto di un polinomio è $P(0)$ e, nel caso del polinomio caratteristico, $P(0) = \det(A - 0I) = \det A$).

DIAGONALIZZAZIONE DELLE MATRICI.

Una matrice si dice **diagonalizzabile** se esiste una base fatta da autovettori. In **questa** base A è scritta in forma diagonale **con gli autovalori sulla diagonale**.

C'è un importante teorema che dice che le matrici A reali e simmetriche, cioè tali che $A = A^t$, sono diagonalizzabili (ovviamente non è obbligatorio che una matrice sia reale e simmetrica per essere diagonalizzabile). Nel caso complesso, la condizione di simmetria è $A = \overline{A}^t$, dove $\overline{A}^t$ è formata dai complessi coniugati degli elementi di A^t.

Per una matrice reale 2×2 il risultato è ovvio:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è simmetrica se $b = c$. Troviamo gli autovalori: $\det(A - \lambda I) = 0$ diventa

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow ad + \lambda^2 - (a+d)\lambda - b^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda - b^2 + ad = 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+d)^2 + 4b^2 - 4ad = a^2 + d^2 + 4b^2 - 4ad \\ &= (a-d)^2 + 4b^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Se $\Delta = 0$, allora $b = 0$ e la matrice è gia diagonale. Se invece gli autovalori sono distinti fra loro ($\Delta > 0$), gli autovettori formano una base, perchè sono 2 e sono indipendenti perchè appartengono ad autospazi di autovalori distinti.

Se A è diagonalizzabile, vuol dire che cambiando base, cioè passando ad una base fatta di autovettori, diventa $A' = M^{-1}AM$, con A' diagonale. La formula non è unica, nel senso che **qualsiasi matrice M che ha come colonne le componenti di una base di autovettori, trasforma A in una matrice diagonale.**

CONDIZIONI DI DIAGONALIZZABILITÀ.

Sia $d(\lambda)$ la **molteplicità algebrica** dell'autovalore λ (cioè la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico) e $m(\lambda)$ la **molteplicità geometrica** di λ (cioè la dimensione dell'autospazio V_λ). Si ha sempre $1 \leqslant m(\lambda) \leqslant d(\lambda)$. Per cui, nel **caso complesso** (cioè nel caso di matrici operanti su vettori di $\mathbb{C}^n$), siccome un polinomio di grado n ha sempre n radici, si ha sempre

$$\sum d(\lambda) = n,$$

dove $\sum$ è la somma su tutti gli autovalori. Allora, se per ogni λ si ha $m(\lambda) = d(\lambda)$, cioè gli autovalori sono tutti **regolari**, è chiaro che **la matrice è diagonalizzabile**, perchè ci sono abbastanza autovettori indipendenti per formare una base $\sum m(\lambda) = n$.

Nel caso **reale**, questo non basta, perchè non è detto che ci siano n radici reali e quindi non è garantito che $\sum d(\lambda) = n$, quindi nemmeno che $\sum m(\lambda) = n$. Allora, una matrice reale è diagonalizzabile se $d(\lambda) = m(\lambda)$ per ogni λ **e, inoltre,** $\sum d(\lambda) = n$.

CASI PARTICOLARI.

Se una matrice **complessa** ha autovalori **tutti distinti** è diagonalizzabile. Infatti, in questo caso, $d(\lambda) = 1$ per ogni λ e $\sum d(\lambda) = n$ e quindi deve essere anche $m(\lambda) = 1$, quindi siamo nel caso di autovalori regolari. Una matrice reale che ha autovalori tutti distinti è diagonalizzabile se, **inoltre**, $\sum d(\lambda) = n$.

Una matrice della forma

$$A = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & M_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & M_s \end{pmatrix},$$

dove $M_1, M_2, ..., M_s$ sono matrici **quadrate**, è detta **matrice a blocchi**. Si può dimostrare che il suo determinante è uguale al prodotto dei determinanti dei vari blocchi $M_1, M_2, ..., M_s$. Inoltre, per lo studio di autovalori, autospazi e diagonalizzabilità si possono **considerare i vari blocchi separatamente.**

OSSERVAZIONE.

Se una matrice A è diagonalizzabile tutte le sue potenze intere A^m lo sono. Se A è invertibile e diagonalizzabile, anche le sue potenze intere negative lo sono (basta ricordare che A e A^m hanno gli stessi autovettori).

ESEMPI.

1) Trovare una matrice M che diagonalizza

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Determiniamo gli autovalori:

$$\det(A - \lambda I) = \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)\left(\frac{3}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{4};$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Le soluzioni sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$.

Per $\lambda_1 = 1$, si ha

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y.$$

Allora $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ è l'autospazio relativo a λ_1 e una base è, ad esempio, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per $\lambda_2 = 2$, si ha

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -y.$$

Allora l'autospazio V_2 è costituito da vettori del tipo $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$. Una base è, ad esempio, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ora possiamo scrivere M, mettendo in colonna v_1 e v_2:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

e si ha

$$A' = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) In $\mathbb{R}^3$ consideriamo l'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\varphi(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_2;$$
$$\varphi(\overrightarrow{e}_2) = \overrightarrow{e}_1;$$
$$\varphi(\overrightarrow{e}_3) = \overrightarrow{e}_3.$$

La matrice associata a φ è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1).$$

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \begin{array}{l} \nearrow \; 1 \text{ con molteplicità } 2 \\ \searrow \; -1 \text{ con molteplicità } 1 \end{array}$$

Autospazi: $V_1 = \{v : Av = v\}$; $\quad V_2 = \{v : Av = -v\}$

$$Av = v \Leftrightarrow (A - I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = 1$, quindi eliminiamo due equazioni e fissiamo due parametri. V_1 è allora il piano di equazione $x - y = 0$, cioè $x = y$ e $v \in V_1$ è del tipo $v = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix}$. Una base di V_1 è, ad esempio, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$Av = -v \Leftrightarrow (A + I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = 2$, quindi eliminiamo un'equazione e fissiamo un parametro. V_2 è allora la retta di equazioni $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e una base è data da $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Una matrice diagonalizzante è, ad esempio,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e si ha $A' = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3) L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{e}_1) &= -\overrightarrow{e}_2; \\ f(\overrightarrow{e}_2) &= \overrightarrow{e}_1; \\ f(\overrightarrow{e}_3) &= \overrightarrow{e}_3, \end{aligned}$$

non è diagonalizzabile. Infatti, la matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e il polinonio caratteristico è $P(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2+1\right)$. Un solo autovalore è reale $\lambda_1 = 1$. Allora V_1 ha dimensione 1 e un vettore non basta per formare una base in $\mathbb{R}^3$. A **è invece diagonalizzabile su** $\mathbb{C}$, cioè come endomorfismo di $\mathbb{C}^3$, perchè in $\mathbb{C}$ ha tre autovalori distinti: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ e i corrispondenti autospazi hanno tutti dimensione 1.

4) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

è a blocchi: $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Il primo blocco ha autovalori 1 e 6 (la verifica è immediata). Il secondo blocco ha rango 1, quindi la dimensione del nucleo è 2 ($\dim\ker M_2 = 3 - r(M_2)$) e 0 è un autovalore di molteplicità geometrica 2 (infatti, $\dim\ker M_2 = \dim\ker(M_2 - 0I) = d(0)$). Inoltre, riusciamo a trovare subito un altro autovalore, osservando che

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per cui 6 è un autovalore. L'autovalore 1 ha molteplicità algebrica e geometrica uguale a 1. Per quanto riguarda l'autovalore 6, questo ha molteplicità algebrica uguale a 2, mentre si deve trovare la sua molteplicità geometrica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 6y \\ 2z+2u+2v \\ 2z+2u+2v \\ 2z+2u+2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \\ 6u \\ 6v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{t}{5} \\ y = t \\ z = r \\ u = r \\ v = r \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{5}t\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

da cui una base per l'autospazio dell'autovalore 6 è:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

quindi 6 è regolare. Infine, 0 ha molteplicità geometrica uguale a 2, come detto sopra. Anche la molteplicità algebrica è uguale a 2, perchè la matrice A è di ordine 5, perciò la somma delle molteplicità algebriche deve dare 5: $m(0) = 5 - m(6) - m(1) = 5 - 2 - 1 = 2$. Poichè tutti gli autovalori sono regolari, la matrice A è diagonalizzabile.

TEOREMA DI CAYLEY-HAMILTON.

Sia A una matrice. Abbiamo visto che $P(x) = \det(A - xI)$ è un polinomio di grado n nella variabile x e gli zeri di $P(x)$ sono gli autovalori di A. Consideriamo il seguente importante:

Teorema di Cayley-Hamilton. Ogni matrice è radice del suo polinomio caratteristico.

ESEMPIO.
Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico: $P(x) = \det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix}$
cioè $P(x) = x^2 - 3x - x + 3 - 1 = x^2 - 4x + 2$.

Il teorema dice che, se al posto di x mettiamo A e al posto di 1 mettiamo l'identità I, otteniamo la matrice nulla, cioè

$$P(A) = A^2 - 4A + 2I = O,$$

con O matrice con tutti 0. Infatti

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$-4A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per le matrici 2×2 è sempre

$$P(x) = x^2 - xTrA + \det A,$$

dove TrA è la **traccia** di A, cioè la somma degli elementi sulla diagonale.

Conseguenza interessante del teorema di Cayley-Hamilton è il calcolo della matrice inversa (se $\det A \neq 0$).

Sia $P(x) = (-1)^n x^n + ... + k_1 x + k_0$ il polinomio caratteristico.

(Si ricordi che il coefficiente di x^n è **sempre** $(-1)^n$ e il termine noto, cioè il termine di potenza 0, è **sempre** $k_0 = \det A$).

$$\begin{gathered} P(A) = O \Leftrightarrow (-1)^n A^n + ... + k_1 A + \det A \cdot I = O \\ \Leftrightarrow A\left[(-1)^n A^{n-1} + k_{n-1} A^{n-2} + ... + k_1 I\right] = -\det A \cdot I \\ \Leftrightarrow A\left[(-1)^n A^{n-1} + k_{n-1} A^{n-2} + ... + k_1 I\right] = -\det A \cdot AA^{-1} \end{gathered}$$

da cui

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{\det A}\left[(-1)^n A^{n-1} + k_{n-1} A^{n-2} + ... + k_1 I\right]}$$

ESEMPIO.

Data

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

si ha $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$, quindi

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\left(-A^2 + 6A - 9I\right) = \frac{1}{4}\left(A^2 - 6A + 9I\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$