Classificazione delle coniche.

Ora si vogliono studiare i luoghi geometrici rappresentati da equazioni di secondo grado. In generale, non è facile riconoscere a prima vista di che cosa si tratta, soprattutto quando è presente il termine in xy. Ad esempio, l'equazione

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 0$$

rappresenta una parabola, ma noi non lo possiamo vedere facilmente dall'equazione canonica, perchè è stata applicata una rotazione che ha fatto comparire il termine in xy.

Invece, l'equazione

$$y^2 - 2y - 2x - 5 = 0$$

è molto più facile da studiare: infatti, si ha

$$\begin{gathered} y^2 - 2y + 1 - 2x - 6 = 0; \\ (y-1)^2 = 2(x-3). \end{gathered}$$

Posto

$$\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y - 1 \end{cases},$$

si ottiene l'equazione $Y^2 = 2X$, e così si vede subito che l'equazione di partenz rappresenta una parabola traslata.

La nostra tecnica generale di studio sarà allora la seguente:

- Se l'equazione di secondo grado non contiene il termine in xy, basta applicare il metodo del completamento dei quadrati, da interpretarsi poi come traslazione.
- Se l'equazione di secondo grado contiene il temine in xy, si cercherà di farlo sparire con un cambiamento di coordinate.

In quest'ultima operazione, ci sarà di aiuto l'algebra lineare, che ci suggerirà quale sia il migliore cambiamento di coordinate. Tutti i cambiamenti di coordinate hanno come obiettivo quello di ridurre l'equazione della conica in forma canonica.

TEOREMA

Data una qualsiasi equazione di secondo grado $f(x;y)=0$, esiste sempre un cambiamento di coordinate che la porta ad una delle forme seguenti:

- 1. $\alpha x^2+\beta y^2=\gamma$;
  2. $\beta y^2=2\gamma x$;
  3. $\beta x^2=2\gamma y$.

Suppongo che tutti i coefficienti dell'equazione canonica siano diversi da zero.

Nel primo caso abbiamo allora un'iperbole oppure un'ellisse. L'ellisse può anche essere IMMAGINARIA: un'esempio di ellisse immaginaria è $x^2+8y^2=-1$. L'ellisse immaginaria è rappresentata da un'equazione che non ammette soluzioni reali, ma solo soluzioni immaginarie.

Nel secondo e nel terzo caso, abbiamo una parabola.

Quando uno solo dei coefficienti dell'equazione canonica è nullo, si tratta di una conica degenere.

Nel caso 1 ci sono due possibilità:

- Se $\gamma=0$, si tratta di una coppia di rette distinte incidenti (se α e β hanno segno diverso) oppure di un singolo punto (se α e β hanno lo stesso segno). Ad esempio, l'equazione $x^2-y^2=0$ rappresenta la coppia di rette $x-y=0$ e $x+y=0$.

- Se $\alpha=0$ (o, analogamente, $\beta=0$), si tratta di una coppia di rette parallele, reali o immaginarie. Ad esempio, l'equazione $y^2=4$ rappresenta la coppia di rette reali $y=2$ e $y=-2$, mentre l'equazione $y^2=-4$ rappresenta una coppia di rette immaginarie, $y=-2i$ e $y=2i$.

Se $\gamma=0$ nei casi 2 e 3, si tratta di una retta $x=0$ oppure $y=0$, contata due volte.

Considero una conica di equazione $f(x;y)=0$. Poichè f è un polinomio di secondo grado, si può scrivere

$$f(x;y)=a_{1;1}x^2+2a_{1;2}xy+a_{2;2}y^2+2a_{1;3}x+2a_{2;3}y+a_{3;3}=0.$$

La matrice

$$B=\begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3} \\ a_{1;2} & a_{2;2} & a_{2;3} \\ a_{1;3} & a_{2;3} & a_{3;3} \end{pmatrix}$$

si dice MATRICE ASSOCIATA AD f.
La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} \\ a_{1;2} & a_{2;2} \end{pmatrix}$$

si dice MATRICE DEI TERMINI DI SECONDO GRADO DI f.
Con un calcolo diretto, si vede facilmente che

$$f(x;y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e che

$$a_{1;1}x^2 + 2a_{1;2}xy + a_{2;2}y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Il cambiamento di coordinate che vogliamo eseguire ha la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ rappresenta una traslazione.

La matrice $P = \begin{pmatrix} p_{1;1} & p_{1;2} \\ p_{1;2} & p_{2;2} \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale che rappresenta una rotazione.

Posto $Q = \begin{pmatrix} p_{1;1} & p_{1;2} & a \\ p_{1;2} & p_{2;2} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, risulta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} ({}^tQ).$$

Siano B' e A' la matrici della stessa equazione, trasformata con il cambiamento di coordinate. Allora, risulta nelle nuove coordinate

$$\begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} B' \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre,

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} ({}^tQ)\, BQ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix},$$

e quindi $B' = ({}^tQ)\, BQ$. Analogamente, si vede che $A' = P^{-1}AP = ({}^tP)\, AP$. Dunque, A e A' sono simili.

Poichè $det(Q) = det(P) = 1$, si ha $det(B) = det(B')$, e B e B' hanno lo stesso rango.

Data ora la conica di equazione

$$a_{1;1}x^2 + 2a_{1;2}xy + a_{2;2}y^2 + 2a_{1;3}x + 2a_{2;3}y + a_{3;3} = 0,$$

il problema è trovare la matrice P che fa scomparire il termine in xy.

Poichè si ha $A' = P^{-1}AP$, è sufficiente che P diagonalizzi A. Essendo A una matrice reale simmetrica, esiste una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP = ({}^tP)\, AP$ sia una matrice diagonale e abbia sulla diagonale gli autovalori di A. Inoltre, P può essere scelta in modo tale che $det(P) = 1$.

In conclusione, se si pone

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix},$$

nel nuovo sistema di riferimento cartesiano scompare il termine in $\overline{XY}$. A questo punto, effettuando una traslazione, si ottiene l'equazione canonica desiderata.

ESEMPIO

Considero la conica di equazione

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 10y + 7 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$.
Gli autovettori corrispondenti sono:
$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
Quindi,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Applicando la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{X} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{Y} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{X} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{Y} \end{cases},$$

si ottiene la nuova equazione:

$$2\overline{X}^2 + 4\overline{Y}^2 + 6\sqrt{2X} - 4\sqrt{2Y} + 1 = 0.$$

Mediante la traslazione

$$\begin{cases} X = \overline{X} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ Y = \overline{Y} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

si ricava infine l'equazione canonica:

$$\frac{X^2}{2} + Y^2 = 1,$$

che rappresenta un'ellisse in forma canonica.

TEOREMA

Sia

$$f(x;y) = a_{1;1}x^2 + 2a_{1;2}xy + a_{2;2}y^2 + 2a_{1;3}x + 2a_{2;3}y + a_{3;3} = 0$$

una conica.

Se la conica ha un centro (cioè è un'ellisse oppure un'iperbole), allora le coordinate $(x;y)$ del centro sono soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} a_{1;1}\, x & + & a_{1;2}\, y & + & a_{1;3} & = & 0 \\ a_{1;2}\, x & + & a_{2;2}\, y & + & a_{2;3} & = & 0 \end{cases}.$$

TEOREMA

Sia

$$f(x;y) = a_{1;1}x^2 + 2a_{1;2}xy + a_{2;2}y^2 + 2a_{1;3}x + 2a_{2;3}y + a_{3;3} = 0.$$

un'iperbole.

Sia

$$g(x;y) = a_{1;1}x^2 + 2a_{1;2}xy + a_{2;2}y^2$$

la componente di secondo grado.

Allora, la conica $g(x;y) = 0$ è una coppia di rette distinte, r_1 ed r_2. Gli asintoti dell'iperbole sono le due rette passanti per il centro parallele ad r_1 ed r_2.

TEOREMA

Sia

$$f(x;y) = a_{1;1}x^2 + 2a_{1;2}xy + a_{2;2}y^2 + 2a_{1;3}x + 2a_{2;3}y + a_{3;3} = 0$$

una conica NON DEGENERE.

Allora, se

$$B = \begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3} \\ a_{1;2} & a_{2;2} & a_{2;3} \\ a_{1;3} & a_{2;3} & a_{3;3} \end{pmatrix}$$

e $P=(x_0;y_0)$ è un punto della conica, la retta tangente alla conica esiste, è unica e ha equazione

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

ESERCIZI

Studiare le seguenti coniche; trovare la loro equazione canonica e scrivere il cambiamento di riferimento canonico.

1) $4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 2y - 3 = 0$;
2) $x^2 - 8xy + 7y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$;
3) $x^2 + 4xy - 2y^2 - 8x - 4y + 1 = 0$;
4) $5x^2 + 2xy + 5y^2 + 6x + 6y + 3 = 0$;
5) $\frac{8}{5}x^2 - \frac{12}{5}xy + \frac{17}{5}y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$;
6) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y - 5 = 0$;
7) $x^2 - 2y^2 + 4x - 4y = 0$;
8) $2xy - x - y + 1 = 0$;
9) $4xy - 3y^2 - 8 = 0$;
10) $7x^2 + 7y^2 - 2xy + 34x + 2y + 31 = 0$.

11) Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, classificare le seguenti coniche:

$$tx^2 + txy - y^2 - y - t = 0.$$

Trovare l'equazione canonica delle parabole.

12) Al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, classificare le seguenti coniche:

$$x^2 + 2hxy + y^2 + 2x + h = 0.$$

Per quali valori di h la conica ha centro sulla retta $x = 1$?

SOLUZIONI

1) La conica è una parabola. Equazione canonica: $Y'^2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}X$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x = \frac{1}{5}\sqrt{5}X - \frac{2}{5}\sqrt{5}Y \\ y = \frac{2}{5}\sqrt{5}X + \frac{1}{5}\sqrt{5}Y + 1 \end{cases}$. Vertice: $(0;1)$. Fuoco: $\left(-\frac{1}{10};\frac{4}{5}\right)$.

2) La conica è un'iperbole. Equazione canonica: $-\frac{X^2}{\frac{1}{9}}+Y^2=1$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x=\frac{1}{5}\sqrt{5}X+\frac{2}{\sqrt{5}}Y+2 \\ y=-\frac{2}{5}\sqrt{5}X+\frac{1}{\sqrt{5}}Y+1 \end{cases}$. Centro: $(2;1)$. Fuochi: $\left(2+\frac{2}{3}\sqrt{2};1+\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$ e $\left(2-\frac{2}{3}\sqrt{2};1-\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$. Asintoti: $y=x-1$; $x-7y+5=0$.

3) La conica è un'iperbole. Equazione canonica: $-\frac{X^2}{3}+\frac{Y^2}{\frac{9}{2}}=1$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x=\frac{1}{5}\sqrt{5}X+\frac{2}{\sqrt{5}}Y+2 \\ y=-\frac{2}{5}\sqrt{5}X+\frac{1}{\sqrt{5}}Y+1 \end{cases}$. Centro: $(2;1)$. Fuochi: $\left(\frac{3}{5}10+2;\frac{3}{10}\sqrt{10}+1\right)$ e $\left(-\frac{3}{5}10+2;-\frac{3}{10}\sqrt{10}+1\right)$. Asintoti: $x=\left(-2+\sqrt{6}\right)y-\sqrt{6}+4$; $x=\left(-2-\sqrt{6}\right)y+\sqrt{6}+4$.

4) La conica è data da un solo punto, $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

5) La conica è un'ellisse. Equazione canonica: $\frac{X^2}{\frac{1}{16}}+\frac{Y^2}{\frac{1}{4}}=1$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x=\frac{1}{5}\sqrt{5}X+\frac{2}{5}\sqrt{5}Y-\frac{7}{4} \\ y=-\frac{2}{5}\sqrt{5}X+\frac{1}{5}\sqrt{5}Y-\frac{3}{2} \end{cases}$. Centro: $\left(-\frac{7}{4};-\frac{3}{2}\right)$. Fuochi: $\left(-\frac{7}{4}+\frac{1}{10}\sqrt{15};-\frac{3}{2}+\frac{1}{20}\sqrt{15}\right)$ e $\left(-\frac{7}{4}-\frac{1}{10}\sqrt{15};-\frac{3}{2}-\frac{1}{20}\sqrt{15}\right)$.

6) La conica è una parabola. Equazione canonica: $Y^2=-\frac{\sqrt{2}}{4}X$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\sqrt{2}X+\frac{1}{2}\sqrt{2}Y+\frac{83}{16} \\ y=-\frac{1}{2}\sqrt{2}X+\frac{1}{2}\sqrt{2}Y-\frac{95}{16} \end{cases}$. Vertice: $\left(\frac{83}{16};-\frac{95}{16}\right)$. Fuoco: $\left(\frac{41}{8};-\frac{47}{8}\right)$.

7) La conica è un'iperbole. Equazione canonica: $\frac{X^2}{2}-Y^2=1$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x=X-2 \\ y=Y-1 \end{cases}$. Centro: $(-2;-1)$. Vertici: $A=\left(\sqrt{2}-2;-1\right)$; $A'=\left(-\sqrt{2}-2;-1\right)$. Assi: $x=-2$, $y=-1$. Fuochi: $F=\left(\sqrt{3}-2;-1\right)$; $F'=\left(-\sqrt{3}-2;-1\right)$.

8) La conica è un'iperbole (equilatera). Equazione canonica: $-2X^2+2Y^2=1$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y+\frac{1}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y+\frac{1}{2} \end{cases}$.

Centro: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Assi: $x+y-1=0$; $x-y=0$. Asintoti: $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{2}$. Vertici: $(0;1)$; $(1;0)$. Fuochi: $F=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)$; $F'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)$.

9) La conica è un'iperbole. Equazione canonica: $-\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{8}=1$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{5}}{5}X+\frac{2\sqrt{5}}{5}Y \\ y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}X+\frac{\sqrt{5}}{5}Y \end{cases}$. Centro: $(0;0)$. Assi: $x-2y=0$; $2x+y=0$. Asintoti: $y=0$; $y=\frac{4}{3}x$. Vertici: $A=\left(\frac{4}{5}\sqrt{10};\frac{2}{5}\sqrt{10}\right)$; $A'=\left(-\frac{4}{5}\sqrt{10};-\frac{2}{5}\sqrt{10}\right)$. Fuochi: $F=\left(2\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$; $F'=\left(-2\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

10) La conica è un'ellisse. Equazione canonica: $\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{\frac{3}{2}}=1$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y-\frac{5}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y-\frac{1}{2} \end{cases}$. Centro: $\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Assi: $x+y+3=0$; $x-y+2=0$. Vertici: $A=\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$; $A'=\left(-\frac{7}{2};-\frac{3}{2}\right)$; $B=\left(-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $B'=\left(-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Fuochi: $F=(-2;0)$; $F'=(-3;-1)$.

11) Per $t=0$: due rette parallele: $y=0$ e $y=-1$.

Per $t=-2-\sqrt{5}$: due rette incidenti: $2x+\left(\sqrt{5}-1\right)y-2=0$ e $2x+\left(3-\sqrt{5}\right)y+2=0$.

Per $t=-2+\sqrt{5}$: due rette incidenti: $2x-\left(1+\sqrt{5}\right)y-2=0$ e $2x+\left(3+\sqrt{5}\right)y+2=0$.

Per $t>0$, $t<-4$, $t\neq-2-\sqrt{5}$; $t\neq-2+\sqrt{5}$, abbiamo iperboli.

Per $-4<t<0$, la conica è un'ellisse reale.

Per $t=-4$, la conica è una parabola. Equazione canonica: $Y^2=\frac{2}{5\sqrt{5}}X$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x=x=\frac{\sqrt{5}}{5}X+\frac{2\sqrt{5}}{5}Y-\frac{393}{200} \\ y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}X+\frac{\sqrt{5}}{5}Y+\frac{403}{100} \end{cases}$.

12) Per $h=-\frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(108+12\sqrt{69}\right)}-\frac{2}{\sqrt[3]{\left(108+12\sqrt{69}\right)}}$: -1.3247 : due rette reali incidenti.

Per $h=1$, $h=-1$: la conica è una parabola.

Per $h>1$, $h<-1$, $h\neq-\frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(108+12\sqrt{69}\right)}-\frac{2}{\sqrt[3]{\left(108+12\sqrt{69}\right)}}$, la conica è un'iperbole.

Per $-1<h<1$: la conica è un'ellisse.

Per $h=\sqrt{2}$, $h=-\sqrt{2}$ la conica ha centro sulla retta $x=1$.