Calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio consiste nello sviluppo di nozioni e tecniche per contare i possibili ordinamenti di un insieme e le possibili scelte di sottoinsiemi di un insieme. Ha numerosi collegamenti con diversi settori della matematica, come l'algebra, la geometria, il calcolo delle probabilità. Quello che è importante non è tanto applicare meccanicamente ai problemi le nozioni e le tecniche apprese, ma usarle (o, anche, non usarle se non è il caso) come strumenti per modellizzare, per individuare le proprietà o le rappresentazioni che ne consentono la soluzione.

Esempio II.0.1

Di 3 urne la I contiene i numeri {1, 2, 3, 4, 5}, la II i numeri {11, 12, 13, 14, 15, 16}, la III i numeri {20, 21}. Quante sono le possibili sequenze composte da un numero della I urna, uno della II e uno della III? Evidentemente vi sono 5 scelte per la prima urna. Per la II urna vi sono 6 scelte per ciascuna delle 5 precedenti, per la III urna 2 scelte per ognuna delle 30 precedenti. Ciascuna scelta è indipendente dalle altre, quindi le possibili sequenze sono $5 \cdot 6 \cdot 2 = 60$.

Esempio II.0.2

Nella stessa situazione dell'esempio II.0.1, devo scegliere un numero a caso da una qualsiasi delle urne. Quante sono le scelte possibili? In questo caso la distribuzione dei numeri nelle urne è indifferente. Le scelte possibili saranno $5+6+2 = 13$. Questa formula vale perché non vi sono numeri che compaiono più volte (nella stessa urna o in urne diverse).

Adesso vediamo alcuni esempi di situazioni abbastanza frequenti in combinatoria, interessanti perché mettono bene in mostra alcune tecniche e alcuni modelli interpretativi.

II.1. Permutazioni

Le permutazioni di n elementi sono i possibili ordinamenti di un insieme di n elementi distinti.

Esempio II.1.1

4 atleti (A, B, C, D) partecipano a una gara per la quale non sono ammesse classificazioni alla pari. Quante sono le classifiche finali teoricamente possibili?

Possiamo ragionare come segue: al I posto potrebbe piazzarsi uno qualunque dei 4 atleti. Ciascuna di queste scelte dà origine a classifiche diverse. Per il II posto, per ciascuna delle scelte precedenti, rimangono 3 scelte possibili (una per ognuno degli atleti che non si sono classificati al I posto). Fino al II posto, le classifiche distinte possibili sono 12. Per il III posto rimangono 2 possibilità, che danno origine a 24 classifiche distinte. Per il IV posto rimane una sola possibilità. Quindi il numero delle classifiche possibili è 24.

Abbiamo trovato che le permutazioni di un insieme di 4 elementi sono 24, cioè $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$; questo numero si può anche rappresentare con 4! e viene chiamato il fattoriale di 4 (vedi scheda 4).

Possiamo generalizzare il risultato dell'esempio e affermare che il numero delle permutazioni di un insieme finito di n elementi è $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ \dots \ \cdot 2 \cdot 1 = n!$. Questo risultato dipende soltanto dal numero degli elementi distinti e non da altre proprietà.

Esempio II.1.2

Supponete di avere 5 cartellini, su ciascuno dei quali è riportata una cifra numerica, nel modo che segue: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$. Quanti numeri distinti di cinque cifre potete rappresentare usando i 5 cartellini? In questo caso la situazione è analoga all'esempio 1: vi sono 5 possibilità per la I cifra, 4 per la seconda, ecc., in totale le permutazioni dei cartellini sono 5!, e ciascuna permutazione dà origine a un numero diverso.

Esempio II.1.3

Supponete di avere 5 cartellini, su ciascuno dei quali è riportata una cifra numerica, nel modo che segue: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{4}$. Quanti numeri distinti di cinque cifre potete rappresentare usando i 5 cartellini?

Attenzione! Le permutazioni dei 5 cartellini sono sempre 5!, ma non danno origine ad altrettanti numeri distinti. Infatti per ogni permutazione, se si scambiano fra loro i due cartellini con la cifra 4 si ottiene il medesimo numero. In altre parole, ogni numero è generato da due diverse permutazioni dei cartellini. Quindi i numeri distinti che si possono ottenere sono $\frac{5!}{2}$.

Esercizi

II.1.1 Quanti sono i numeri distinti di 3 cifre che si possono formare (in base dieci) con $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{6}$?

II.1.2 Idem, ma con $\boxed{6}$, $\boxed{6}$, $\boxed{6}$.

II.1.3 Quanti sono i numeri distinti di 4 cifre che si possono formare (in base dieci) con $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{6}$, $\boxed{6}$?

II.1.4 Idem, ma con $\boxed{5}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{6}$.

II.2. Disposizioni semplici

Una generalizzazione dell'idea di permutazione è data eliminando il vincolo per cui il numero degli elementi n è pari al numero dei posti k e considerando situazioni in cui $k \leq n$. Una *disposizione semplice* (cioè, senza ripetizioni) *di n elementi k a k* è una sequenza ordinata di k elementi presi da un insieme di n elementi $(k \leq n)$, senza ripetizioni.

Esempio II.2.1

A una finale di atletica partecipano 8 concorrenti. I primi 3 classificati, nell'ordine, salgono sul podio. Quante sono tutte le possibili composizioni del podio?

Il ragionamento non è molto diverso da quelli precedenti: ci sono 8 possibilità per il I posto, 7 per il II, 6 per il III, quindi in totale $8 \cdot 7 \cdot 6 = \dfrac{8!}{(8-3)!} = 336$ possibilità. Va osservato che in casi come questo l'ordine in cui gli atleti si dispongono sul podio è rilevante, mentre non è rilevante quello che accade a partire dal quarto posto. Abbiamo calcolato il numero delle disposizioni semplici di 8 elementi 3 a 3, che viene solitamente indicato con $D_{8,3}$. Più in generale, il numero delle disposizioni di n elementi k a k $(k \leq n)$ è dato da: $D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Esercizi

II.2.1 In relazione all'esempio 1, supponete di sapere chi sono i primi 3 classificati ma di non sapere in che ordine. Quante sono le possibili composizioni del podio in questo caso?

II.2.2 Sempre in relazione all'esempio 1, supponete che 3 concorrenti (su 8) vengano squalificati e alla gara partecipino solo 5 atleti. Quante sono le possibili composizioni del podio in questo caso?

II.2.3 Uno studente ha frequentato 4 corsi e decide di sostenere 3 esami nella prossima sessione. Non ha ancora deciso quali esami sostenere e in che ordine. Fra quante possibilità può scegliere? Che cosa cambierebbe se decidesse di sostenere 4 esami?

II.2.4 Supponete di avere cinque cartellini, su ciascuno dei quali è riportata una cifra, nel modo che segue: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$. Quanti numeri distinti di quattro cifre potete rappresentare usando 4 cartellini per volta?

II.3. Combinazioni semplici

Una ulteriore generalizzazione è ottenuta se non si tiene conto dell'ordine. Una *combinazione semplice di n elementi k a k* è una scelta di k elementi presi da un insieme di n elementi $(k \leq n)$, senza ripetizioni, in situazione in cui l'ordine in cui vengono scelti gli elementi non è rilevante.

Esempio II.3.1

A una gara di atletica partecipano 8 concorrenti. I primi 3 classificati sono ammessi a una gara successiva, indipendentemente dal loro piazzamento. Quante sono le 'terne' di qualificati possibili?

Possiamo ragionare come segue. Alcune terne che nell'esempio precedente erano distinte adesso sono equivalenti; più precisamente, a ogni terna di qualificati corrispondono 6 (cioè, 3!) configurazioni del podio: gli ordini di arrivo che qualificano A, B, C sono tanti quante le loro permutazioni, e cioè ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Quindi possiamo prima calcolare quante sono le disposizioni semplici di 8 elementi 3 a 3 (come nell'esempio II.2.1), poi dividendo per 6 troviamo il numero delle combinazioni. Abbiamo calcolato il numero delle combinazioni semplici di 8 elementi 3 a 3, e abbiamo usato la formula $C_{8,3} = \dfrac{8!}{(8-3)!3!}$. Più in generale, il numero delle combinazioni semplici di n elementi k a k $(k \leq n)$ è dato dalla formula $C_{n,k} = \dfrac{D_{n,k}}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$. L'espressione $\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ viene chiamata anche *coefficiente binomiale*, si può abbreviare con $\dbinom{n}{k}$ e si legge: "n su k". Nella scheda 5 viene spiegato il perché di questa denominazione.

Esercizi

II.3.1. Il concorso del ‘Totogol’ consiste nel pronosticare le 8 partite di calcio in cui si segna il maggior numero di reti, scelte in un insieme di 30, con criteri opportuni per risolvere i casi di ex-aequo. Non è richiesto di specificare alcun ordine fra le 8 partite. Quante sono le possibili combinazioni che si potrebbero verificare in ogni concorso?

II.3.2. Una società sportiva organizza un torneo giovanile di calcio, che prevede 16 partite e intende organizzare una gara a premi sul tipo del ‘Totogol’. Verranno premiati tutti coloro che indovinano le 6 partite in cui si segna il maggior numero di reti. Quante schedine sarebbe necessario giocare per avere la certezza di vincere un premio?

II.3.3. Nella situazione precedente, come modifichereste il numero delle partite da indovinare in modo da rendere la gara più facile possibile? E per renderla più difficile possibile?

II.3.4. Un insieme contiene 10 elementi. Quanti sono i suoi sottoinsiemi che contengono esattamente 4 elementi? E quelli che ne contengono 2? E quelli che ne contengono …?

II.4. Disposizioni con ripetizione

Nella definizione di disposizione semplice si richiedeva che non vi fossero ripetizioni e che $k \leq n$. Se si rinuncia a qusti vincoli si ottiene la definizione di disposizione con ripetizioni. Una *disposizione con ripetizioni di* n *elementi* k *a* k è una sequenza ordinata di k elementi presi da un insieme di n elementi, con la possibilità di ripetizioni.

Esempio II.4.1

2 tennisti, A e B, disputano una serie di 8 partite. Supponiamo di scrivere un elenco in cui per ognuna delle 8 partite viene riportato il nome del vincitore. Quanti sono gli elenchi possibili.

In questo caso occorre contare tutte le sequenze ordinate di 8 simboli, composte con i simboli A e B. Per ciascuna partita il vincitore può essere A oppure B, senza vincoli. Quindi le sequenze possibili sono $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^8$. Quindi le disposizioni con ripetizione di 2 elementi 8 a 8 sono 2^8. In generale le disposizioni con ripetizione di n elementi k a k sono n^k.

Esercizi

II.4.1. Quante sono le possibili colonne vincenti al Totocalcio?

II.4.2. Ogni mattina il professore della I ora segna nel registro, accanto ai nomi degli alunni, disposti in ordine alfabetico, il simbolo P (presente) o A (assente). Sapendo che gli alunni sono 20, quante sono le sequenze di simboli teoricamente possibili ogni mattina?

II.4.3. Considerate l’insieme {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Quanti sono i suoi sottoinsiemi? (Questo problema può essere risolto con ragionamenti diversi: provate a individuarne un paio.)

Il problema dei compleanni:

Consideriamo le disposizioni con ripetizione di n elementi k a k che sono n^k: alcune di esse (le disposizioni semplici che sono $\frac{n!}{(n-k)!}$), non presentano ripetizioni. Possiamo concludere che la probabilità che **non** ci siano ripetizioni è

$p=n!/(n-k)!\ n^k$. Ovviamente $1-p$ è, invece, la probabilità che ci siano ripetizioni. Questa formula fornisce risultati abbastanza sorprendenti.

Quale è la probabilità che su cinquanta studenti due di essi festeggino il compleanno lo stesso giorno? Applicando la formula con n=365 e k=50 si ottiene circa 99% !

Problemi vari

PII.1. Quanti sono, in base dieci, i numeri di tre cifre, senza cifre ripetute, compresi tra 200 e 400 ?

PII.2. Quanti sono, in base dieci, i numeri di tre cifre in cui non compare la cifra 0?

PII.3. Un esame scritto consiste di 3 domande. Si sa che i candidati sono 30, che la domanda 1 ha avuto 20 risposte corrette, che la domanda 2 ha avuto 20 risposte corrette e la domanda 3 ha avuto 15 risposte corrette. Come potrebbe variare il numero dei candidati che hanno risposto correttamente a tutte le 3 domande?

PII.4. E' dato l'insieme di lettere dell'alfabeto italiano A:= {a, b, c, d, e}.

a. Quanti sono i sottoinsiemi di A che non contengono consonanti?
b. Quanti sono i sottoinsiemi B di A tali che $a \in B$ ma $b \notin B$?
c. Quanti sono i sottoinsiemi di A contenenti al più 3 elementi?

PII.5. Supponete di disporre dei 6 cartellini raffigurati di seguito, su ognuno dei quali è stampato un numero.

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{4}$ $\boxed{4}$

a. Quanti numeri distinti (di 6 cifre in base dieci) si possono comporre usando tutti i 6 cartellini?
b. Quanti numeri distinti (di 5 cifre in base dieci) si possono comporre usando 5 a scelta dei 6 cartellini?

P.II.6. Supponete di avere i cinque cartellini rappresentati di seguito, su ognuno dei quali è stampata una cifra numerica: $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ e di affiancarli per comporre numeri telefonici di cinque cifre (rappresentati in base dieci). Un numero telefonico non può iniziare con 0.
a. Quanti numeri telefonici distinti potete ottenere affiancando i cinque cartellini?
b. Quanti numeri telefonici distinti (di 5 cifre) potete ottenere se disponete inoltre di un sesto cartellino $\boxed{4}$?

P.II.7. E' dato il seguente insieme di numeri interi A:= {4, 11, 761, 22, 7, 80}.
a. Quanti sono i sottoinsiemi di A che non contengono numeri pari?
b. Quanti sono i sottoinsiemi B di A i cui elementi sono dispari oppure divisibili per 4?
c. Quanti sono i sottoinsiemi di A contenenti al più 4 elementi?

P.II.8. Considerate gli insiemi A:= {0, 1, 2, 3, 4}, B:= {0, 1, 2, 3, 4, 5} con l'ordinamento usuale. Quante sono le funzioni f: A$\to$A che verificano la condizione "$x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$".

PII.9. Considerate l'insieme I_5:= {1, 2, 3, 4, 5} con le usuali relazioni d'ordine sui numeri naturali.
a. Quante sono le funzioni f: $I_5 \to I_5$ tali che, dati m, n, se $m<n$, allora $f(m)<f(n)$?
b. Quante sono le funzioni iniettive f: $I_5 \to I_5$ tali che $f(3)<f(2)<f(1)$?

P.II.10. Considerate l'insieme I_4:= {1, 2, 3, 4} con le usuali relazioni d'ordine sui numeri naturali.
a. Quante sono le funzioni f: $I_4 \to I_4$ tali che, dati m, n, se $m<n$, allora $f(m)<f(n)$?
b. Quante sono le funzioni iniettive f: $I_4 \to I_4$ tali che $f(3)<f(2)$?
c. Se dalla domanda b. si elimina la condizione di iniettività, il numero richiesto aumenta, diminuisce o rimane costante?

Scheda 4

IL FATTORIALE

Dato un numero naturale n, il fattoriale di n, in formula $n!$, è il prodotto di tutti i numeri naturali da 1 a n.
Quindi $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot \ldots \cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$. Il fattoriale di 0 vale 1 per convenzione.
È possibile definire il fattoriale induttivamente, nel modo che segue:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1)n! \end{cases}$$

Esercizi

S4.1. Calcolate $n!$ per n=0, n=1, n=2, n=3, n=4, n=5, n=6.

S4.2. Provate (come?) che per ogni numero naturale n e per ogni numero naturale k, $n!$•$(n+k)!$.

S4.3. Stabilite se è vero che $\frac{6!}{3!} = 3!$.

S4.4. Dato un qualunque numero naturale m, calcolate $\frac{m!}{(m-2)!}$.

S4.5. Stabilite se è vero che per ogni numero naturale n e ogni numero naturale k tale che 0<k•m, vale:

$$m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}$$

Scheda 5

IL COEFFICIENTE BINOMIALE

Dati i numeri naturali n, k (k•n) si definisce: $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Il coefficiente binomiale trae il suo nome dallo sviluppo delle potenze dei binomi. Vale infatti la formula:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Lo sviluppo di $(a+b)^n$ è dato dalla somma di 2^n monomi ciascuno dei quali è della forma $a^{n-i}b^i$. Se i=0 c'è un solo monomio di quella forma, e il coefficiente è 1. Se i=1, ci sono n monomi di quella forma (tutti quelli ottenuti moltiplicando un solo fattore b per n–1 fattori a).
Quindi il numero di monomi simili a un monomio della forma $a^{n-i}b^i$ è pari al numero delle combinazioni semplici di n elementi i a i.

Esercizi

S.5.1. Calcolate $\binom{4}{k}$ per tutti i valori interi di k compresi fra 0 e 4.

S.5.2. Provate che per ogni n naturale, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

S.5.3. Provate che per ogni n naturale, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

S.5.4. Provate che per ogni n e ogni k naturali tali che k•n, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

S.5.5. Provate che per ogni n e ogni k naturali tali che k•n, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.