

Geometria (Informatica) – 20 Luglio 2005

1. Sia A la seguente matrice reale 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Qual'è il rango di A ? **(2 punti)**
 - (b) Si mostri che il vettore $(1, 1, 1)$ è un autovettore di A e si dica rispetto a quale autovalore. **(3 punti)**
 - (c) Si trovino autovalori e autospazi di A . **(5 punti)**
 - (d) Si mostri che A è diagonalizzabile e si scriva la matrice diagonalizzante. **(3 punti)**
 - (e) Si spieghi perchè la matrice $A + I$ è invertibile e si scriva $(A + I)^{-1}$ nella base rispetto alla quale A è diagonale. **(5 punti)**
2. Si consideri il piano

$$\pi = \{(0, 0, 1) + (1, 2, 1)t + (1, 0, 1)s\}.$$

- (a) Si scriva l'equazione di una retta r ortogonale a π . **(3 punti)**
 - (b) Si scriva l'equazione di un piano π' parallelo a π . **(3 punti)**
3. Sia A una matrice del tipo

$$A = \begin{pmatrix} x & x & y \\ x & z & z \\ y & y & z \end{pmatrix}$$

dove x, y e z sono variabili reali e sia $v = (k, 0, 1)$.

- (a) Si mostri che l'equazione

$$Av = v$$

dà luogo a un sistema lineare nelle variabili x, y, z e parametro k . **(3 punti)**

- (b) Si discuta, al variare di k in \mathbb{R} , esistenza e numero di soluzioni del sistema trovato. **(7 punti)**