

Esercizi di Geometria

Foglio 1. Rette e piani.

Esercizio 1.

Equazione cartesiana di un piano. Sia

$$\pi = \{\vec{x}_0 + t\vec{v} + s\vec{w}\}$$

un piano in \mathbb{R}^3 e sia \vec{n} una direzione normale a π . Si ponga

$$c = -\vec{n} \cdot \vec{x}_0.$$

Si dimostri che un punto \vec{x} sta sul piano π se e solo se \vec{x} soddisfa

$$\vec{n} \cdot \vec{x} + c = 0 \tag{1}$$

Scritta in coordinate, (1) diventa

$$px + qy + rz + c = 0, \tag{2}$$

dove $\vec{n} = (p, q, r)$ e $\vec{x} = (x, y, z)$. La (2) viene detta *equazione cartesiana* del piano π .

Esercizio 2.

Si calcoli l'equazione cartesiana dei seguenti piani

- (a) $\{(0, 0, 0) + t(1, 0, 0) + s(1, 0, 1)\}$
- (b) $\{(0, 1, 0) + t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1)\}$
- (c) $\{(0, 0, 0) + t(0, 1, 0) + s(2, 0, 1)\}$
- (d) $\{(0, 1, 0) + t(1, 2, 3) + s(0, -1, 2)\}$
- (e) $\{(1, 1, 1) + t(1, 0, -1) + s(0, 1, -1)\}$
- (f) $\{(1, 0, 0) + t(10, 0, -1) + s(1, 1, 1)\}$

Esercizio 3

Si calcoli l'intersezione dei seguenti piani

- (a) $\pi = \{(0, 1, 0) + t(1, -1, -6) + s(-1, 1, 0)\}$
 $\pi' = \{(0, 0, 0) + t'(1, -1, 0) + s'(0, 1, -1)\}$
- (b) $\pi = \{(0, 0, 0) + t(1, 0, 0) + s(-1, -2, 2)\}$
 $\pi' = \{(0, 0, 1) + t'(1, 1, 1) + s'(-1, 1, 0)\}$

- (c) $\pi = \{(3, 0, 0) + t(3, 1, 3) + s(1, -1, 1)\}$
 $\pi' = \{(0, 0, 0) + t'(-1, -3, -1) + s'(4, 0, 4)\}$
- (d) $\pi = \{(1, 1, 1) + t(-2, 8, -1) + s(0, 10, -1)\}$
 $\pi' = \{(0, 0, 1) + t'(1, 1, 0) + s'(0, 10, -1)\}$

Esercizio 4

Trovare la retta r passante per \vec{p} e ortogonale al piano π e determinare il punto di intersezione tra r e π nei seguenti casi.

- (a) $\pi = \{(0, 0, 0) + t(0, -1, 1) + s(2, 0, 2)\}$
 $\vec{p} = (0, 0, 3)$
- (b) $\pi = \{(-1, 0, 0) + t(-2, -2, 1) + s(0, 1, 0)\}$
 $\vec{p} = (1, 0, 0)$