Geometria per informatici

12 Gennaio 2000

Gli studenti di matematica devono svolgere anche l'esercizio n.6 e il punteggio ottenuto sarà trasformato in trentesimi moltiplicando per $30/37 = 0.81$

1. Trovare il piano di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(0,0,0)$ e ortogonale alla retta passante per $(1,2,1)$ e $(0,0,0)$. **Punti 2**

2. Scrivere, nella base $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice di una applicazione lineare che ha come nucleo e immagine rispettivamente la retta e il piano dell'esercizio 1. **Punti 4**

3. Si consideri l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ definita, nella base e_1, e_2, e_3, da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - e_2 \\ f(e_{2)} &= -e_1 + e_2 \\ f(e_3) &= e_1 + e_2 - e_3 \end{aligned}$$

   (a) Trovare le basi del nucleo e dell'immagine, autovalori e autovettori. **Punti 6**

   (b) Posto $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,quante soluzioni ha il sistema lineare $f^{100}(v) = v$? **Punti 5**

4. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + kz = 0 \\ x + z = k \\ x + y = k \end{array} \right\}$$

   Punti 4

5. Fissata la base canonica e_1, e_2, e_3 in $\mathbb{R}^3$ si considerino i seguenti vettori :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   e i sottospazi $U = Span\{v_1, v_2\}$ e $V = Span\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$.

   (a) Trovare la dimensione di $U \cap V$ e dare una base. **Punti 3**

   (b) Trovare la dimensione di $U + V$ e dare una base. **Punti 3**

   (c) Scrivere una base del sottospazio dei vettori ortogonali a $U \cap V$. **Punti 3**

6. Si consideri la matrice *reale* $\begin{pmatrix} k & k+1 \\ 1-k & k \end{pmatrix}$ operante su $\mathbb{R}^2$ con la base ortogonale standard $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Per che valori del parametro k la matrice e' invertibile? **Punti 1**

   (b) Per che valori del parametro k la matrice e' diagonalizzabile? **Punti 4**

   (c) Per che valori del parametro k gli autovettori sono ortogonali fra loro? **Punti 2**