Geometria (Informatica) — 12 settembre 2000

Ricordo le "regole del gioco": sotto i 16.5 punti si deve ripetere lo scritto, tra 16.5 e 18 si ***deve*** *fare l'orale, sopra i 18 si* ***può*** *fare l'orale.*

1. Si consideri l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ definita, nella base e_1, e_2, e_3, da:

$$\begin{array}{l} f(e_1) = e_1 + e_2 - e_3 \\ f(e_{2)} = e_1 + e_2 \\ f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3 \end{array}$$

a) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine. **Punti 3**
b) Calcolare $f^{100}(v)$ e $f^{-1}(v)$ dove $v = e_1 - 2e_2 + e_3$. **Punti 3**

2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 37 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ si calcoli A^{37}. **Punti 2**

3. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) si trovino gli autovalori. **Punti 6**
b) si mostri che è diagonalizzabile. **Punti 6**

4. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 con base $\{1, x, x^2, x^3\}$ e W lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4 con base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Cioè:

$$V \equiv \left\{ v = a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$
$$W \equiv \left\{ w = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \text{ con } a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

e si consideri l'applicazione lineare f da V a W definita dall'integrale:

$$f(v) = \int_0^x v dx$$

a) Trovare nucleo e immagine di f. **Punti 4**
b) Trovare, *nelle basi indicate*, la matrice della applicazione f. **Punti 4**
c) Trovare il rango di f. **Punti 2**