Geometria (informatica) — 14 Marzo 2002

1. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i piani W e Z di equazioni parametriche $W = t(1,2,1)+s(1,1,-1)$ e $Z = (3,-2,1) + t(3,6,3) + s(-2,-2,2)$.

   (a) Trovare una retta r passante per l'origine e ortogonale al piano W. **(2 punti)**

   (b) Scrivere una applicazione lineare che abbia come immagine il piano W e come nucleo la retta r . **(2 punti)**

   (c) Trovare il punto di intersezione tra la retta r e il piano Z . **(3 punti)**

   (d) Mostrare che i due piani Z e W non si intersecano. **(2 punti)**

2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -e_1 \\ f(e_2) &= e_1 + e_2 \\ f(e_3) &= e_1 + e_2 - e_3 \end{aligned}$$

   (a) Sia A la matrice associata; trovare autovalori e autospazi di $A^8 - A^3$ **(4 punti)**

   (b) Risolvere il sistema $(A^8 - A^3)^2 v = 4v$ (dove $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)**(4 punti)**

3. Sia A una matrice **complessa** 5×5 con polinomio caratteristico $p(\lambda) = -\lambda^2 - \lambda^5$

   (a) A è invertibile? **(2 punti)**

   (b) Quando A è diagonalizzabile? **(3 punti)**

   (c) Scrivere il polinomio caratteristico di A^{12}. **(4 punti)**

4. Si consideri la matrice **reale:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k+2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 3k \end{pmatrix}$$

   (a) Per che valori di k è diagonalizzabile? (**4 punti**)

   (b) Posto $k = -1$, trovare molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore $\lambda = -2$ e una base del suo autospazio. **(4 punti)**