

Geometria (Informatica) — 16 settembre 2003

1. Fissata in \mathbb{C}^3 la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned}f(e_1) &= e_1 - ie_2 + (1 - i)e_3 \\f(e_2) &= ie_1 + e_2 + (1 + i)e_3 \\f(e_3) &= (1 + i)e_1 + (1 - i)e_2 + 2e_3\end{aligned}$$

Scrivere:

- (a) Una base per il nucleo. **(punti 3)**
- (b) Una base per l'immagine. **(punti 3)**
- (c) Gli autovalori e gli autospazi della matrice associata. **(punti 3)**
- (d) Il polinomio caratteristico. **(punti 3)**

2. Sia A una matrice complessa quadrata di 11 righe e 11 colonne e sia

$$p(\lambda) = -\lambda^6(\lambda^2 - 2)(\lambda^3 - 3)$$

il suo polinomio caratteristico. Si dimostri che A è diagonalizzabile se e solo se il suo rango è 5. **(punti 6)**

3. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 6 \\x - 2y - z &= k - 2 \\x + ky + z &= k + 2\end{aligned}$$

Discutere l'esistenza ed il numero di soluzioni al variare di k in \mathbb{R} . **(punti 6)**

4. Fissata in \mathbb{C}^3 la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned}f(e_1) &= -ie_2 - ie_3 \\f(e_2) &= ie_1 + ie_3 \\f(e_3) &= ie_1 - ie_2\end{aligned}$$

Si discuta la verità (o la falsità) delle seguenti affermazioni:

- (a) f è invertibile. **(punti 3)**
- (b) $e_1 + e_2$ è un autovettore. **(punti 3)**
- (c) $e_3 - e_1 - e_2$ è un autovettore. **(punti 3)**