Geometria (Informatica) — 18 Maggio 2005

1. Dato il piano
$$\pi = \{(3,1,1) + t(1,0,2) + s(0,3,3)\}$$
e la famiglia di piani
$$\pi'(k) = \{t'(1,3,5) + s'(1+k,-3,-1)\}$$
si determini il valore di k tale che $\pi'(k)$ è parallelo a π. Si ricorda che piani coincidenti non vengono considerati paralleli.

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Trovare autovalori e autospazi.

   (b) Tale matrice è diagonalizzabile ?

   (c) Quante soluzioni ha il sistema lineare $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$?

SOLUZIONI

I due piani sono paralleli o coincidenti se e solo se la matrice delle direzioni

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1+k \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

ha rango 2. In particolare si ha che il determinante della sottomatrice ottenuta eliminando da A il terzo vettore colonna deve essere nullo. Quindi si deve avere

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+k \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = -6k = 0,$$

che implica $k = 0$. Si verifica poi che tutte le sottomatrici 3×3 di $A(0)$ hanno determinante nullo, quindi $\pi'(0)$ è parallelo o coincidente a π.

Per escludere che $\pi'(0)$ sia coincidente a π è sufficiente verificare che $(3, 1, 1)$ non sta in π, ovvero che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Esercizio 2

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right\} \leftrightarrow 2, \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \leftrightarrow -2, \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \leftrightarrow 4$$