

Geometria (Informatica) — 1 luglio 2003

Ricordo le "regole del gioco": sotto i 17 punti si deve ripetere lo scritto, con 17 e 18 si **deve** fare l'orale, sopra i 18 si **può** fare l'orale.

1. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a. Si trovino gli autovalori e gli autospazi corrispondenti. **Punti 5**

b. Si mostri che è diagonalizzabile. **Punti 5**

c. Scriverne il polinomio caratteristico. **Punti 4**

2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 con base $\{1, x, x^2, x^3\}$. Cioè:

$$V \equiv \{a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

e si consideri l'applicazione lineare f da V a V definita dalla seguente espressione:

$$f(v) = x^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - x \frac{dv}{dx}$$

a. Calcolare $f(v)$ dove $v = 2 - 2x + 4x^2 + x^3$. **Punti 2**

b. Trovare, *nella base indicata*, la matrice della applicazione f . **Punti 2**

c. Trovare nucleo e immagine di f^2 . **Punti 4**

d. Trovare autovalori e autospazi di f . **Punti 4**

e. Trovare $f^{-1}(v)$ dove $v = 2x + 3x^3$. **Punti 3**

f. Trovare $f^{-1}(v)$ dove $v = 1 + x + x^2$. **Punti 3**