Scritto di Geometria - 22 marzo 2005

1. Si consideri la matrice reale:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Trovare gli autovalori della matrice. **3 punti**

   (b) Trovare gli autospazi della matrice. **4 punti**

   (c) Si spieghi perché è diagonalizzabile. **3 punti**

   (d) Si scriva una matrice diagonalizzante. **3 punti**

   (e) Scrivere il polinomio caratteristico della matrice A^{-4}. **4 punti**

   (f) Quante soluzioni ha il sistema lineare $A^{10}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$? **5 punti**

2. Discutere, al variare del parametro reale h, il sistema lineare: **4 punti**
$$\begin{cases} hx + (h^2 - 1)\,y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

3. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica si considerino i sottospazi:
$$V = Span\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$
$$U = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   (a) calcolare la dimensione di $U + V$. **4 punti**

   (b) trovare un vettore v che **non** appartenga a $U + V$. **3 punti**

Cenno sulle soluzioni:

ESERCIZIO n.1

La matrice è: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con autovalori e autospazi:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 3, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 4$$

il suo polinomio caratteristico è:

$$\det \begin{pmatrix} 1-z & 0 & 2 \\ 0 & 4-z & 0 \\ 2 & 0 & 1-z \end{pmatrix} = -12 - 5z + 6z^2 - z^3$$

Il polinomio caratteristico di A^{-4} è $p(z) = \left((-1)^{-4} - z\right)\left((3)^{-4} - z\right)\left((4)^{-4} - z\right)$. Il sistema lineare è l'equazione agli autovalori per l'autovalore 1 della matrice A^{10}. Siccome la matrice A ha l'autovalore -1, la matrice A^{10} possiede l'autovalore 1, il suo autospazio ha dimensione 1 (è stata calcolata prima la sua base) e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.

ESERCIZIO n.2

$$A = \begin{pmatrix} h & h^2 - 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 2h - h^2 + 1$$

Il sistema è omogeneo ed è sempre compatibile. Se $h = 1 \pm \sqrt{2}$ allora $det(A) = 0$ e $r(A) = 1$ il sistema ha ∞^1 soluzioni. In ogni altro caso si ha che $r(A) = 2$, il sistema ha una soluzione.

ESERCIZIO n.3

La dimensione di U è chiaramente 2, quella di V è anch'essa 2, perchè il rango della matrice dei suoi vettori generanti è 2. La matrice di tutti i vettori è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui rango è 3, infatti non può essere 4 perchè c'è una riga di zeri ed è immediato trovare un minore di rango 3, ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Questo significa che la dimensione dello spazio somma è anch'essa 3. Questo significa, per il teorema delle dimensioni, che

$$\dim(U \cap V) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Osservando inoltre che tutti i vettori coinvolti hanno terza componente nulla, si ricava subito che, ad esempio, il vettore $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ non si può ottenere come combinazione lineare dei vettori dati.