Scritto di Geometria - 23 giugno 2005

1. Si consideri la matrice reale:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Dimostrare che 16 è un autovalore e trovare gli altri autovalori. **3 punti**

   (b) Trovare gli autospazi della matrice. **3 punti**

   (c) Si spieghi perché è diagonalizzabile e si scriva una matrice diagonalizzante. **3 punti**

   (d) Trovare, nella base in cui A è diagonale, una matrice B tale che $A = B^2$. **3 punti**

   (e) Scrivere il polinomio caratteristico della matrice A^{-1}. **3 punti**

   (f) Per quali valori di k il vettore $\begin{pmatrix} k^2 \\ k+2 \\ 2k \end{pmatrix}$ è un autovettore ? **4 punti**

2. Discutere, al variare del parametro reale h, il sistema lineare: **4 punti**
$$\begin{cases} hx + (h^2 - 1)\, y = \sqrt{3} \\ hx + 2y = \sqrt{3} \end{cases}$$

3. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base canonica si considerino i sottospazi:
$$V = Span \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$
$$U = Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   (a) calcolare la dimensione di $U + V$ e quella di $U \cap V$. **3 punti**

   (b) trovare un vettore $v \neq (0, 0, 0)$ che appartenga a $U \cap V$. **3 punti**

Cenni sulle soluzioni:

ESERCIZIO n.1

La matrice è: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, con autovalori e autospazi:

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 9, \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 16$$

il suo polinomio caratteristico è:

$$\det \begin{pmatrix} 5-z & 0 & 4 \\ 0 & 16-z & 0 \\ 4 & 0 & 5-z \end{pmatrix} = 144 - 169z + 26z^2 - z^3$$

Il polinomio caratteristico di A^{-1} è $p(z) = (1-z)\left(\frac{1}{9} - z\right)\left(\frac{1}{16} - z\right)$. Il vettore $\begin{pmatrix} k^2 \\ k+2 \\ 2k \end{pmatrix} \in$ a uno degli autospazi solo per $k = 0, -2$.

ESERCIZIO n.2

$$A = \begin{pmatrix} h & h^2-1 \\ h & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3h - h^3$$

$$A' = \begin{pmatrix} h & h^2-1 & \sqrt{3} \\ h & 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Se $h = 0, \pm\sqrt{3}$ allora $det(A) = 0$ e $r(A) = 1$. In ogni altro caso si ha $r(A) = 2$, il sistema ha una soluzione. Nel caso $h = 0$, $r(A') = 2$ e quindi il sistema non è compatibile. Nei casi $h = \pm\sqrt{3}$, $r(A') = 1$ e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.

ESERCIZIO n.3

La dimensione di U è 2, quella di V è anch'essa 2, perchè il rango delle matrici dei vettori generanti è 2. La matrice di tutti i vettori è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui rango è 3.Questo significa che la dimensione dello spazio somma è anch'essa 3. Questo significa anche, per il teorema delle dimensioni, che

$$\dim(U \cap V) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Per trovare un vettore nell'intersezione, conviene osservare subito che deve avere terza componente nulla, deve poi essere proporzionale a $(2, 1, 0)$.