Scritto di Geometria - 23 marzo 2005

1. Si consideri la matrice reale:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Verificare che 6 è un autovalore e trovare gli altri autovalori della matrice. **4 punti**

   (b) Trovare gli autospazi della matrice. **4 punti**

   (c) Si spieghi perché è diagonalizzabile. **3 punti**

   (d) Si scriva una matrice diagonalizzante. **3 punti**

   (e) Scrivere il polinomio caratteristico della matrice A^4. **4 punti**

   (f) Quante soluzioni ha il sistema lineare $A^3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 27 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$? **5 punti**

2. Quante soluzioni ha il seguente sistema lineare al variare del parametro reale k ? **4 punti**
$$\begin{cases} -x + ky = 1 \\ kx + (k^2 - 1)\, y = 1 \end{cases}$$

3. Si mostri che i due piani π e π' si intersecano e non sono ortogonali. **6 punti**

$$\pi = \{(7,0,0) + t(1,0,2) + s(10,5,1)\}, \pi' = \{(0,-1,0) + t(0,1,1) + s(5,1,-1)\}$$

Cenno sulle soluzioni:

ESERCIZIO n.1

La matrice è: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, con autovalori e autospazi:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 3, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 6$$

Infatti il suo polinomio caratteristico è:

$$\det \begin{pmatrix} 4-z & 1 & 1 \\ 1 & 4-z & 1 \\ 1 & 1 & 4-z \end{pmatrix} = 54 - 45z + 12z^2 - z^3$$

Dividendo il polinomio caratteristico per $(6-z)$ si ottiene $\frac{54-45z+12z^2-z^3}{6-z} = z^2 - 6z + 9$ da cui si trova subito l'autovalore doppio 3 e si riconosce che 6 è autovalore. :Il polinomio caratteristico di A^4 è $p(z) = (6^4 - z)\left((3^4 - z)\right)^2$. Gli autovalori sono regolari e la matrice è diagonalizzabile. Una matrice diagonalizzante è data mettendo in colonna gli elementi della base di autovettori, ad esempio:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Il sistema lineare è l'equazione agli autovalori per l'autovalore 27 della matrice A^3. Siccome la matrice A ha l'autovalore 3, la matrice A^3 possiede l'autovalore 27, il suo autospazio ha dimensione 2 (è stata calcolata prima la sua base) e quindi il sistema ha ∞^2 soluzioni.

ESERCIZIO n.2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k \\ k & k^2-1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ k & k^2-1 & 1 \end{pmatrix}, det(A) = -2k^2 + 1$$

Per $k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $r(A) = 1$, mentre A' in questo caso ha rango 2, il sistema è incompatibile. In ogni altro caso si ha che $r(A) = 2$, il sistema ha una soluzione.

ESERCIZIO n.3

π e π' sono incidenti, poichè la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ha rango 3. Si calcola anche che una direzione normale a π è data da

$$\vec{n}_1 = (-2, \frac{19}{5}, 1)$$

e una normale a π' è data da

$$\vec{n}_2 = (\frac{2}{5}, -1, 1).$$

I due piani non sono ortogonali poichè $n_1 \cdot n_2 \neq 0$.