Scritto di Geometria - 23 marzo 2005

1. Si consideri la matrice reale:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
   (a) Trovare gli autovalori della matrice. **4 punti**
   (b) Trovare gli autospazi della matrice. **4 punti**
   (c) Si spieghi perché è diagonalizzabile. **3 punti**
   (d) Si scriva una matrice diagonalizzante. **3 punti**
   (e) Scrivere il polinomio caratteristico della matrice A^{-2}. **4 punti**
   (f) Quante soluzioni ha il sistema lineare $A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 25 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$? **5 punti**

2. Quante soluzioni ha il seguente sistema lineare al variare del parametro reale k ? **4 punti**
$$\begin{cases} -x + ky = 0 \\ kx + (k^2 - 1)\, y = 0 \end{cases}$$

3. Si mostri che i due piani π e π' non coincidono e sono paralleli. **6 punti**

$$\pi = \{(0,0,0) + t(4,1,2) + s(1,1,1)\}, \pi' = \{(0,1,0) + t(3,0,1) + s(0,3,2)\}$$

Cenno sulle soluzioni:

ESERCIZIO n.1

La matrice è: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, con autovalori e autospazi:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 5, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$$

Infatti il suo polinomio caratteristico è:

$$\det \begin{pmatrix} 2-z & 2 & 1 \\ 1 & 3-z & 1 \\ 1 & 2 & 2-z \end{pmatrix} = 5 - 11z + 7z^2 - z^3$$

Si vede subito che 1 è radice del polinomio caratteristico. Dividendo il polinomio caratteristico per $(1-z)$ si ottiene $\frac{5-11z+7z^2-z^3}{1-z} = z^2 - 6z + 5$ da cui si trovano subito le altre radici 1 e 5. Il polinomio caratteristico di A^{-2} è $p(z) = \left(\frac{1}{25} - z\right)(1-z)^2$. Gli autovalori sono regolari e la matrice è diagonalizzabile. Una matrice diagonalizzante è data mettendo in colonna gli elementi della base di autovettori, ad esempio:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Il sistema lineare è l'equazione agli autovalori per l'autovalore 25 della matrice A^2. Siccome la matrice A ha l'autovalore 5, la matrice A^2 possiede l'autovalore 25, il suo autospazio ha dimensione 1 (è stata calcolata prima la sua base) e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.

ESERCIZIO n.2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k \\ k & k^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = -2k^2 + 1$$

Il sistema è omogeneo e quindi sempre compatibile. Per $k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $r(A) = 1$ il sistema ha ∞^1 soluzioni. In ogni altro caso si ha che $r(A) = 2$, il sistema ha una soluzione.

ESERCIZIO n.3

I piani sono paralleli poichè la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2. I due piani non coincidono poichè la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 (B è la matrice ottenuta ponendo come vettori colonna $\vec{x}_0' - \vec{x}_0$ e le direzioni di π').