Geometria — 26 Marzo 2003

ESERCIZIO n.1: Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base canonica si considerino i seguenti vettori:

$$v = (1, 1, 3) \quad w = (-1, 2, 1) \quad u = (1, 0, 1)$$

ed i seguenti sottospazi: $U = span\,\{v, w\}$ e $V = span\,\{v, w, u\}$. Si ricordi che $span\,\{...\}$ è il sottospazio generato dai vettori contenuti nella parentesi.

1. Calcolare le dimensioni di $U \cap V$ e di $U + V$. **(4 punti).**
2. Scrivere l'equazione della retta passante per l'origine e ortogonale al piano che contiene v e w. **(2 punti).**
3. Per che valori di k il vettore $z = (3, 3, k)$ appartiene a U ? **(3 punti).**
4. Per che valori di k il vettore $z = (5k^2, 4, 3k)$ è ortogonale a U ? **(3 punti).**

ESERCIZIO n.2: Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare **reale** definita da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= \frac{k}{8}e_1 + \frac{k}{8}e_3 \\ f(e_3) &= e_1 + 2e_2 \end{aligned}$$

1. Scrivere il polinomio caratteristico e trovare gli autovalori **(3 punti)**
2. Studiare la diagonalizzabilità della matrice al variare di k in $\mathbb{R}$. **(5 punti)**
3. Per che valori di k la matrice è invertibile? **(2 punti)**
4. Per che valori di k il vettore $v = 2e_1 + 4e_2 + 2e_3$ è un autovettore con autovalore 2 ? **(3 punti)**
5. Studiare, al variare di k, la risolubilità e il numero di soluzioni del sistema lineare $Au = b$, dove A è la matrice associata a f , $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **(4 punti)**
6. Trovare i valori di k per cui la dimensione del nucleo di f è la più grande possibile e, in questo caso, trovarne una base. **(3 punti)**