Geometria per informatici

I° scritto - 29 aprile 1999

1. Trovare il piano di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(0,0,0)$ e ortogonale alla retta passante per $(1,1,1)$ e $(0,0,0)$. **Punti 3**

2. Scrivere nella base $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la matrice di una applicazione lineare che ha come nucleo e immagine rispettivamente la retta e il piano dell'esercizio 1. **Punti 5**

3. Si consideri l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ definita, nella base e_1, e_2, e_3, da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 + e_2 \\ f(e_{2)} &= e_1 + e_2 \\ f(e_3) &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

   Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine. **Punti 4**

4. Trovare $f(v)$, $f^{-1}(v)$ e $f^{-1}(w)$ dove $v = e_1 + e_2 + e_3$ e $w = e_1 + 2e_2 + e_3$. **Punti 4**

5. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ kx + y - kz = 0 \\ k^2x + y + k^2z = 0 \end{array} \right\}$$

   Punti 5

6. Fissata la base canonica e_1, e_2, e_3 in $\mathbb{R}^3$ si considerino i seguenti vettori :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   e i sottospazi $U = Span\{v_1, v_2\}$ e $V = Span\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$.

   (a) Trovare la dimensione di $U \cap V$ e dare una base. **Punti 3**

   (b) Trovare la dimensione di $U + V$ e dare una base. **Punti 3**

   (c) Scrivere una base del sottospazio dei vettori ortogonali a $U \cap V$. **Punti 3**