Geometria (Informatica) — 3 Giugno 1999

1. Fissata in $\mathbb{C}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - ie_2 + (1-i)e_3 \\ f(e_2) &= ie_1 + e_2 + (1+i)e_3 \\ f(e_3) &= (1+i)e_1 + (1-i)e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

   Si trovino:

   (a) Gli autovalori della matrice associata **(3 punti).**

   (b) Il polinomio caratteristico **(2 punti).**

   (c) Una **base** di autovettori **(4 punti).**

2. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= ke_1 + e_3 \\ f(e_3) &= e_1 + e_2 \end{aligned}$$

   (a) Si studi la diagonalizzabilità della matrice al variare di k in $\mathbb{R}$. **(5 punti)**

   (b) Per che valori di k la matrice è invertibile? **(3 punti)**

   (c) Per che valori di k il vettore $v = e_3 - e_1 + e_2$ è un autovettore ? **(3 punti)**

3. Sia A una matrice **complessa** quadrata di 15 righe e 15 colonne e sia $p(z) = z^6(z^2 - 2)(z^3 - 3)(z^4 - 5)$ il suo polinomio caratteristico. Si dimostri che A è diagonalizzabile se e solo se il suo rango è 9. **(6 punti)**

4. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ si calcoli A^{129}.**(4 punti)**