

Scritto di Geometria - 6 luglio 2004

1. Fissata in $\mathbb{C}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned}f(e_1) &= -ie_3 \\f(e_2) &= e_3 \\f(e_3) &= ie_1 + e_2 + e_3\end{aligned}$$

Trovare:

- (a) Il polinomio caratteristico. **2 punti**
 - (b) Gli autovalori della matrice associata. **3 punti**
 - (c) Gli autovettori della matrice associata. **3 punti**
 - (d) $f^5(-2ie_1 - 2e_2 + 2e_3)$. **4 punti**
2. Discutere al variare di k sia in $\mathbb{R}$, sia in $\mathbb{C}$, il seguente sistema lineare.
8 punti

$$\begin{cases} kx & & + & kz = 1 \\ -5x & + & y & + & z = 2 \\ -k^2x & & & + & z = 3 \end{cases}$$

- 3 In $\mathbb{R}^3$ sono dati i sottospazi

$$\begin{aligned}U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = z\} \\V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0\} \\W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 3z = 0\}\end{aligned}$$

Determinare $U \cap V$, $U \cap W$, $\dim U$, $\dim V$, $\dim W$, $\dim(U + V)$, $\dim(U + W)$, **2 punti per ogni risposta esatta.**

Cenno sulle soluzioni:

ESERCIZIO n.1

La matrice è: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con autovalori e autospazi:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2, \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1$$

il suo polinomio caratteristico è:

$$\det \begin{pmatrix} -z & 0 & i \\ 0 & -z & 1 \\ -i & 1 & 1-z \end{pmatrix} = z^2 - z^3 + 2z$$

Il vettore $\begin{pmatrix} -2i \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è un autovettore dell'autovalore -1 e quindi il risultato è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} -2i \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1)^5 \begin{pmatrix} -2i \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO n.2

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ -5 & 1 & 1 \\ -k^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & k & 1 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \\ -k^2 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\det(A) = k + k^3 = k(k^2 + 1)$$

In $\mathbb{R}$, $\det(A) = 0$ per $k = 0$. Se $k = 0$ il sistema é incompatibile (si nota subito dalla prima eqz.); se $k \neq 0$ esiste ed é unica la soluzione. In C , $\det(A) = 0$ per $k = 0$ e $k \neq_{\pm} i$. Se $k \neq 0$ e $k \neq_{\pm} i$ esiste ed é unica la soluzione; se $k = 0$ il sistema é incompatibile (si nota subito dalla prima eqz.); se $k =_{\pm} i$ si ha $r(A) = 2$ e $r(A') = 3$, dunque il sistema é incompatibile.

ESERCIZIO n.3

Si ha:

$$\begin{aligned}U \cap V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = z, x + y - 2z = 0\} \\U \cap W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = z, 2x + 3z = 0\}\end{aligned}$$

Determiniamo le dimensioni e le basi dei vari sottospazi

$$\begin{aligned}U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = t, y = t, z = t\} = \langle (1, 1, 1) \rangle \\V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = -t + 2s, y = t, z = s\} = \langle (-1, 1, 0), (2, 0, 1) \rangle \\W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = -3/2t, y = s, z = t\} = \langle (-3, 0, 2), (0, 1, 0) \rangle \\U \cap V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = t, y = t, z = t\} = \langle (1, 1, 1) \rangle \\U \cap W &= \{(0, 0, 0)\}\end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\dim U &= 1 \\ \dim V &= 2 \\ \dim W &= 2 \\ \dim(U \cap V) &= 1 \quad \text{ed in particolare} \quad U \cap V = U \\ \dim(U \cap W) &= 0\end{aligned}$$

Per determinare le dimensioni degli spazi somma utilizziamo la formula delle dimensioni:

$$\begin{aligned}\dim(U + V) &= \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2 \\ \dim(U + W) &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3\end{aligned}$$