Geometria (Informatica) — 9 Gennaio 2003

1. Fissata in $\mathbb{C}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= ie_2 \\ f(e_2) &= ie_1 + ie_3 \\ f(e_3) &= ie_2 \end{aligned}$$

   (a) Trovare una base per il nucleo e una base per l'immagine **(4 punti).**

   (b) Trovare autovalori e autovettori **(4 punti)**

   (c) Quante soluzioni ha il sistema lineare $A^4(v) = 4v$ (dove A è la matrice associata a f e $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)? **(4 punti)**

   (d) Quante soluzioni ha il sistema lineare $A^4(v) = -4v$? **(4 punti)**

2. Si considerino, in $\mathbb{R}^3$, i piani W e V di equazioni $x + y - z = 0$ e $x + y = 0$.

   (a) Trovare l'equazione parametrica della retta $r = V \cap W$ **(3 punti)**

   (b) Scrivere una applicazione lineare di nucleo r e immagine U (dove U è il piano ortogonale a r e passante per l'origine delle coordinate. **(5 punti)**

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Trovare autovalori e autovettori. (**4 punti**)

   (b) Tale matrice è diagonalizzabile ? (**3 punti**)