APPLICAZIONI LINEARI

Un'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice **lineare** se $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si ha

$$\varphi\left(a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{w}\right) = a\varphi\left(\overrightarrow{v}\right) + b\varphi\left(\overrightarrow{w}\right)$$

(con le ovvie modifiche si tratta il caso complesso).

Consideriamo, ad esempio, il caso $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. La proprietà di linearità ci dice che **per conoscere φ basta sapere come opera sui vettori della base**. Infatti, supponiamo di usare la stessa base $e = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ sia nell'$\mathbb{R}^2$ di partenza che in quello di arrivo. Se $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e}_1 + v_2\overrightarrow{e}_2 = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, allora

$$\varphi\left(\overrightarrow{v}\right) = v_1\varphi\left(\overrightarrow{e}_1\right) + v_2\varphi\left(\overrightarrow{e}_2\right),$$

quindi basta dare

$$\varphi\left(\overrightarrow{e}_1\right) = a\overrightarrow{e}_1 + b\overrightarrow{e}_2, \quad \varphi\left(\overrightarrow{e}_2\right) = c\overrightarrow{e}_1 + d\overrightarrow{e}_2.$$

Allora φ ha una rappresentazione matriciale:

$$\varphi\left(\overrightarrow{v}\right) = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (a\overrightarrow{e}_1 + b\overrightarrow{e}_2, c\overrightarrow{e}_1 + d\overrightarrow{e}_2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{aligned} \varphi\left(\overrightarrow{v}\right) &= \left(a\overrightarrow{e}_1 + b\overrightarrow{e}_2\right)v_1 + \left(c\overrightarrow{e}_1 + d\overrightarrow{e}_2\right)v_2 \\ &= \left(av_1 + cv_2\right)\overrightarrow{e}_1 + \left(bv_1 + dv_2\right)\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} av_1 + cv_2 \\ bv_1 + dv_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ovvero, in una base qualsiasi $e = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$,

$$\varphi\left(\overrightarrow{v}\right) = eAv,$$

dove A **è la matrice che rappresenta la** φ e si costruisce:
1) mettendo in **colonna** i trasformati dei vettori della base

$$\varphi\left(\overrightarrow{e}_1\right) = \left(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \varphi\left(\overrightarrow{e}_2\right) = \left(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\right)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

2) oppure mettendo in **riga** i trasformati delle coordinate del vettore $\overrightarrow{v}$

$$\varphi\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + cv_2 \\ bv_1 + dv_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Viceversa, ogni matrice dà un'applicazione lineare (per vedere che ciò ha senso, si deve parlare di trasformazione di basi, come faremo in seguito).
Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare, consideriamo due sottoinsiemi interessanti:
1) il **nucleo** di φ:

$$\ker\varphi = \left\{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } \varphi\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{0}\right\};$$

2) l'**immagine** di φ:

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^m \text{ tali che esiste } \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n \text{ per cui } \varphi\left(\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{v}\}.$$

Se $\ker\varphi = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ (cioè nel nucleo c'è solo il vettore nullo) e $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (quindi $m = n$), allora φ è biunivoca, cioè manda tutto $\mathbb{R}^n$ su tutto $\mathbb{R}^n$, in modo che vettori distinti vanno in vettori distinti e ogni vettore "viene" da un vettore. Infatti, se due vettori $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ hanno la stessa immagine

$$\varphi\left(\overrightarrow{v}_1\right) = \varphi\left(\overrightarrow{v}_2\right) \Rightarrow \varphi\left(\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2\right) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2 \in \ker\varphi = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2.$$

Inoltre, in questo caso esiste φ^{-1} e quindi $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} = \varphi\left(\varphi^{-1}\left(\vec{v}\right)\right)$, cioè $\exists \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{w} = \varphi^{-1}\left(\vec{v}\right)$ tale che $\vec{v} = \varphi\left(\vec{w}\right)$, cioè $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}^n$.

Si dice che φ è un **isomorfismo** e si ha che la matrice A associata a φ è **invertibile**: $w = Av \Rightarrow v = A^{-1}w$.

Gli isomorfismi danno i cambiamenti di base, cioè trasformano vettori indipendenti in vettori indipendenti in modo biunivoco. Se abbiamo $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ indipendenti e in numero "giusto", cioè n, gli $\vec{e}'_i = \varphi\left(\vec{e}_i\right)$ sono ancora indipendenti (verificare !) ed in numero "giusto". Quindi, se e ed e' sono due basi, dato un vettore $\vec{v}$, si può scrivere $\vec{v} = ev$, ma anche $\vec{v} = e'v'$. Allora, se $e' = eB$ (con B isomorfismo, quindi invertibile), segue

$$ev = \vec{v} = e'v' = eBv' \Rightarrow v = Bv' \Rightarrow v' = B^{-1}v.$$

Inoltre, se

$$\varphi(\vec{v}) = eAv = e'A'v' \Rightarrow eAv = eBA'B^{-1}v \Rightarrow A = BA'B^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{A' = B^{-1}AB},$$

cioè se B è la matrice associata al cambiamento di base, le componenti dei vettori trasformano con B^{-1}, mentre le matrici delle applicazioni lineari trasformano come $B^{-1}AB$.

Allora $\varphi(\vec{v}) = eAv = e'A'v'$ e **ogni matrice - fissata una base - dà un'applicazione lineare** .

NOTA.

$\det A' = \det A$, perchè $\det A' = \det B^{-1} \det A \det B = \det A$ e rango(A') = rango(A), perchè $r(B^{-1}AB) = r(AB) = r(A)$, essendo B e B^{-1} invertibili. Allora due matrici che in due diverse basi rappresentano la **stessa** applicazione lineare hanno uguale determinante e uguale rango. Non è vero il viceversa.

Altre proprietà delle applicazioni lineari. Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare.

1) $\ker \varphi$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Infatti, se

$$\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2 \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(\overrightarrow{v}_1) = \overrightarrow{0} \text{ e } \varphi(\overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{0}$$
$$\Rightarrow \varphi(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = \varphi(\overrightarrow{v}_1) + \varphi(\overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 \in \ker\varphi.$$

Inoltre, se $\overrightarrow{v}_1 \in \ker\varphi$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda\overrightarrow{v}_1) = \lambda\varphi(\overrightarrow{v}_1) = \lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda\overrightarrow{v}_1 \in \ker\varphi.$$

2) $\operatorname{Im}\varphi$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$. Infatti, se $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2 \in \operatorname{Im}\varphi$, allora $\exists\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2 \in \mathbb{R}^n$ tali che $\overrightarrow{v}_1 = \varphi(\overrightarrow{w}_1)$ e $\overrightarrow{v}_2 = \varphi(\overrightarrow{w}_2)$.

$$\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 = \varphi(\overrightarrow{w}_1) + \varphi(\overrightarrow{w}_2) = \varphi(\overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}_2),$$

cioè $\exists\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}_2 \in \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$, cioè $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 \in \operatorname{Im}\varphi$. Inoltre, se $\overrightarrow{v}_1 \in \operatorname{Im}\varphi$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda\overrightarrow{v}_1 = \lambda\varphi(\overrightarrow{w}_1) = \varphi(\lambda\overrightarrow{w}_1) \Rightarrow \lambda\overrightarrow{v}_1 \in \operatorname{Im}\varphi.$$

3) **Teorema della dimensione**. Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare

$$\boxed{\text{dimker}\,\varphi + \text{ dimIm}\,\varphi = n}.$$

Inoltre, se A è la matrice associata a φ

$$\boxed{\text{dimIm}\,\varphi = r(A)}.$$

La formula ha senso, perchè abbiamo visto che non dipende dalla base scelta per scrivere A. Inoltre, siccome $r(A)$ è il numero di colonne indipendenti e le colonne di A sono i trasformati dei vettori della base, allora $\operatorname{Im}\varphi$ è generata da questi vettori. Si vede dalla prima formula che **se $n < m$ l'applicazione non può essere suriettiva e che se $n > m$ l'applicazione non può essere iniettiva**.

ESEMPIO.

In $\mathbb{R}^3$ con la base canonica $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, consideriamo l'applicazione φ:

$$\begin{aligned}\varphi(\overrightarrow{e}_1) &= \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2\\ \varphi(\overrightarrow{e}_2) &= \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_3\\ \varphi(\overrightarrow{e}_3) &= \overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e}_3.\end{aligned}$$

La matrice associata è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Troviamo

$$\ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = -z \\ z = -x \end{cases}$$

cioè $\overrightarrow{v} \in \ker\varphi \Leftrightarrow$ è del tipo $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Una base di $\ker\varphi$ è $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim\ker\varphi = 1$.

Troviamo

$$\operatorname{Im}\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

Intanto, si vede che $\det A = 0$, quindi $r(A) = 2$. Cerchiamo ora una base per $\operatorname{Im}\varphi$. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' = x \\ x' + z' = y \\ y' - z' = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow x - y = z,$$

cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}\varphi$ se e solo se è del tipo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Una base per $\operatorname{Im}\varphi$ è allora $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e

$$\dim \operatorname{Im}\varphi = 2 = r(A).$$

Si poteva osservare che, dalla definizione di φ,

$$\varphi(\overrightarrow{e}_3) = \varphi(\overrightarrow{e}_1) - \varphi(\overrightarrow{e}_2),$$

quindi i vettori che stanno in $\operatorname{Im}\varphi$ sono del tipo

$$\varphi(\overrightarrow{w}) = a\varphi(\overrightarrow{e}_1) + b\varphi(\overrightarrow{e}_2).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \varphi(\overrightarrow{e}_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi(\overrightarrow{e}_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sono una base di $\operatorname{Im}\varphi$.