# MATRICI

Consideriamo l'insieme

$$M(n \times m) = \left\{ \begin{array}{c} \text{tabelle di } nm \text{ numeri (reali o complessi)} \\ \text{ordinati in } n \text{ righe e in } m \text{ colonne} \end{array} \right\}$$

$$= \{\textbf{matrici a } n \textbf{ righe ed } m \textbf{ colonne}\}$$

Rappresentiamo una matrice come una tabella della forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix},$$

la indichiamo con $A$ e scriviamo $A = (a_{ij})$, dove $a_{ij}$ è il generico elemento di $A$ contrassegnato da un indice di riga $i$ e un indice di colonna $j$. Se $m = n$, la matrice si dice **quadrata di ordine** $n$. Se $A, B \in M(n \times m)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si possono definire:

1) $A + B = C \in M(n \times m)$, sommando gli elementi nello stesso posto $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
2) $\lambda A \in M(n \times m)$, con $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Se $A \in M(n \times m)$ e $B \in M(m \times q)$, si definisce il prodotto tra matrici

$$AB = C \in M(n \times q)$$

con il **prodotto righe per colonne**: $(AB)_{ik}$, cioè l'elemento di posto $i, k$ della matrice $AB$, è il **prodotto scalare** della $i$-esima riga di $A$, $(a_{i1}a_{i2}...a_{in})$, per la $k$-esima colonna di $B$, $\begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix}$:

$$(a_{i1}a_{i2}...a_{in})\begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{im}b_{mk}.$$

Il generico elemento di $C$ è: $c_{ij} = \sum_m a_{im}b_{mj}$. Notiamo che $A$ e $B$ possono essere moltiplicate tra loro solo se

**numero colonne di $A$ = numero righe di $B$.**

Due matrici quadrate dello stesso ordine si possono sempre moltiplicare.

ESEMPIO.
$(2 \times 2)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}.$$

OSSERVAZIONE **(importante!)**.
Se si possono fare sia $AB$ che $BA$, in generale si ha che $AB \neq BA$. Inoltre, $AB = O$, dove $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, non implica che $A$ o $B$ siano zero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La **matrice trasposta** $A^t$ di $A$ è la matrice ottenuta da $A$ scambiando le righe con le colonne. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. In generale $(A^t)_{ik} = a_{ki}$.

**Proprietà** immediate della matrice trasposta:
1) $(A+B)^t = A^t + B^t$;
2) $(AB)^t = B^tA^t$.

3) $(A^t)^t = A$.
Se $A = (a_{ij})$ è una matrice quadrata, gli elementi $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ costituiscono la **diagonale principale** di $A$. Una matrice si dice **diagonale** se gli elementi fuori della diagonale principale sono nulli.

Consideriamo matrici **quadrate** (per ora $2 \times 2$). La matrice con tutti 1 sulla diagonale principale è la **matrice identità** $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed ha le stesse proprietà del numero 1, cioè $AI = IA = A$.

Sappiamo che se $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, possiamo definire un inverso $a^{-1}$ tale che $aa^{-1} = 1$. Nel caso delle matrici, non basta che $A \neq O$ per poter definire una $A^{-1}$ tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Serve la nozione di **determinante** della matrice $A$ ($\det A$). Nel caso $2 \times 2$, si ha

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Si vede subito che $\det(AB) = \det A \det B$. Se $\det A \neq 0$, si può definire $A^{-1}$:

$$\text{se } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ si ha } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si verifica immediatamente che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

**Proprietà dell'inversa**: $a)$ $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$;
$b)$ $(A^{-1})^{-1} = A$;
$c)$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
$d)$ $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Si noti anche che $\det A^t = \det A$.

Per le matrici $n \times n$, il **determinante** si definisce ricorsivamente nel seguente modo: se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

allora

$$\det A = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} a_{1p} \det(A_{1p})$$

dove $A_{1p}$ è la sottomatrice di $A$ ottenuta da $A$ eliminando la $1^a$riga e la $p$-esima colonna. Anche qui $\det A^t = \det A$ e $\det AB = \det A \det B$.

ESEMPI.

1) Consideriamo la matrice $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo $\det A = \sum\limits_{p=1}^{2} (-1)^{p+1} a_{1p} \det A_{1p}$. Si ha: $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = a_{21}$, per cui

$$\det A = (-1)^2 a_{11} \det A_{11} + (-1)^3 a_{12} \det A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(analoga alla definizione data precedentemente).

2) Consideriamo la matrice $3 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}.$$

<u>Formula generale per l'inversa</u>: sia $A_{pq}$ la sottomatrice ottenuta eliminando da $A$ la $p$-esima riga e la $q$-esima colonna. Si definisce **complemento** $\tilde{a}_{ij}$ dell'elemento $a_{ij}$ di $A$:

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Allora

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A}\tilde{a}_{ji} \text{ (notare lo scambio: } ji \textbf{ e non } ij).$$

Applicazione al caso $2 \times 2$. Se $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ è la **matrice dei complementi**, la formula precedente si riscrive $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}^t$. Allora se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si ha

$$\tilde{a}_{11} = d, \;\; \tilde{a}_{22} = a, \;\; \tilde{a}_{12} = -c, \;\; \tilde{a}_{21} = -b,$$

per cui

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \;\; \tilde{A}^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

quindi $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

NOTA.
$\tilde{a}_{ij}$ **serve anche a calcolare il determinante usando la riga che è più comoda (cioè quella con più zeri):**

$$\det A = \sum_j a_{ij}\tilde{a}_{ij} \qquad\qquad i \textbf{ è scelto da noi.}$$

ESEMPIO.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante scegliendo la $3^a$riga, $i = 3$.

$$\tilde{a}_{31} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2,\ \tilde{a}_{32} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$
$$\tilde{a}_{33} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$
$$\det A = \sum_j a_{3j}\tilde{a}_{3j} = 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 0.$$

Rango di una matrice. Sia $A$ una matrice $n \times m$. Si chiama **minore** di $A$ una sottomatrice **quadrata** contenuta in $A$. L'**ordine** del minore è l'ordine della sottomatrice quadrata.

ESEMPIO.
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i minori sono:
ordine 1: $1, 0, 2, 3$;
ordine 2: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
ordine 3: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si dice **rango** di $A$ e si indica con $r(A)$, l'ordine (cioè il numero di righe e di colonne) **massimo** dei minori di $A$ con determinante $\neq 0$.

ESEMPIO.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 1; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ha rango 1;
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 0;
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2.

Ovviamente $r(A) \leqslant \min\{n, m\}$.

**Proprietà essenziale. Il rango di $A$ è il numero massimo di colonne linearmente indipendenti** (o di righe linearmente indipendenti, perchè $r(A) = r(A^t)$).

ESEMPIO.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2, perchè

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti il determinante della matrice è uguale a zero (verificare) e il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, che ha ordine 2 ha determinante diverso da zero.

**Teorema**. Sia $AB = C$. Allora se *$A$ è invertibile* $r(AB) = r(B)$; se *$A$ e $B$ sono invertibili* $r(AB) = r(A) = r(B)$.

<u>Notazioni matriciali dei vettori e delle basi</u>. (**Convenzione di Einstein**) Una matrice può anche essere costituita da oggetti più generali dei numeri reali, basta che sugli oggetti siano definite operazioni che danno senso a prodotti e somme; ad esempio, considereremo matrici di numeri complessi e anche di vettori.

Consideriamo la base $e = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n)$, il vettore $\overrightarrow{v}$ e il vettore colonna delle componenti di $\overrightarrow{v}$: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Allora $\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \overrightarrow{e}_i$. Si può scrivere

$$\overrightarrow{v} = ev$$

ed anche, per il prodotto scalare:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = v^t w = (v_1, ..., v_n)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 w_1 + ... + v_n w_n.$$