CENNI SULLE PROGRESSIONI, LE SERIE, LE RELAZIONI DI RICORRENZA E I NUMERI DECIMALI.

Una **progressione (o successione)** è un insieme **infinito** di numeri reali $P = \{a_n \text{ con } n = 1, 2, ...\} = \{a_1, a_2, ...\}$. La somma dei primi n termini della progressione si indica con $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Quando consideriamo "tutti" i termini della progressione, cioè quando facciamo tendere $n \to \infty$ si usa scrivere formalmente $S = S_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. S è detta somma della **serie** associata alla progressione. Ci sono casi di progressioni per cui la serie **converge** cioè S **è un numero finito**. Negli altri casi S non esiste oppure è $= \pm\infty$.

Si dice **progressione aritmetica** una progressione in cui $a_{n+1} = a_n + d$ con d uguale ad un numero fisso detto *ragione aritmetica* della progressione (in altri termini si ha: $a_1 = a, a_2 = a + d, a_3 = a + 2d, a_n = a + (n - 1)d$).

ESEMPIO:

$1, 2, 3, 4, ...$ si ha $a = 1$ e $d = 1$

$20, 18, 16, 14, ...$ si ha $a = 20$ e $d = -2$

$-3, -3. - 3, ...$ si ha $a = -3$ e $d = 0$.

Per una progressione aritmetica si ha

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + ... + (a + (n - 1)d) \text{ e anche:}$$
$$S_n = (a + (n - 1)d) + (a + (n - 2)d) + .. + (a + d) + a$$

Sommando le due righe **uguali** si ottiene:

$$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)d$$

ESEMPIO:

$13 + 10 + 7 + ...$ fino a $n = 12$. Si ha: $a = 13, d = -3, n = 12$ per cui la somma è $S_{12} = \frac{1}{2}12(26 - 33) = -42$

Si dice **progressione geometrica** una progressione in cui $a_{n+1} = a_n d$ con d uguale ad un numero fisso detto *ragione geometrica* della progressione (in altri termini si ha: $a_1 = a, a_2 = ad, a_3 = ad^2, a_n = ad^{n-1}$).

ESEMPIO:

$2, 4, 8, 16....$ si ha $a = 2$ e $d = 2$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}...$ si ha $a = 1$ e $d = \frac{1}{2}$

$-3, -3. - 3, ...$ si ha $a = -3$ e $d = 1$.

Per una progressione geometrica si ha:

$$S_n = a + ad + ad^2 + ... + ad^{(n-1)}$$
$$dS_n = ad + ad^2 + ... + ad^n$$

Sottraendo le due righe si ottiene:

$$S_n = \frac{a(1-d^n)}{1-d}$$

ESEMPIO: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$...fino a $n=12$ si ha $a=1$ e $d=\frac{1}{2}$, e $n=12$ per cui:

$$S_{12} = \frac{(1-(\frac{1}{2})^{12})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4095}{2048}$$

.

Se $|d|<1$ allora $d^n \to 0$ quando $n \to \infty$ (infatti se $|d|<1$, prendendo n sufficientemente grande possiamo rendere d^n arbitrariamente piccolo) e quindi la serie associata ad una progressione geometrica **converge**:

$$S = S_\infty = \frac{a}{1-d}$$

ESEMPIO: $48+12+3+\frac{3}{4}+$...... si ha: $a=48$, $d=\frac{1}{4}<1$ per cui **la somma infinita** è 64.

Si dice **progressione di Fibonacci** una progressione in cui ogni termine (a partire dal terzo) è la somma dei due termini precedenti: $a_n = a_{n-2}+ a_{n-1}$ per $n=3,4,5,...$ mentre per $n=1,2$ si pone $a_1=a_2=a$ (in altri termini si ha: $a_1=a, a_2=a, a_3=2a, a_3=3a, a_4=5a, ...$).

ESEMPIO:

I **numeri di Fibonacci** si ottengono ponendo $a=1$; si ottiene: $1,1,2,3,5,$ $8,13,21,...$questi numeri hanno proprietà affascinanti e intervengono in moltissimi campi della matematica e della biologia come sarà mostrato a lezione.

Se si considerano i rapporti tra i numeri di Fibonacci, $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},$..... si nota che sono tutti ≤ 1 e >0.

Sia $R_n = a_{n-1}/a_n$ l'n-esimo rapporto, e sia $R=R_\infty$ il limite dei rapporti (che esiste per l'osservazione precedente). Siccome $a_n = a_{n-2}+ a_{n-1}$, dividendo per a_{n-1} si ottiene:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}+1$$

cioè

$$1/R_n = R_{n-1}+1$$

e, passando al limite, $1/R = R+1$ cioè $R^2+R-1=0$, le cui soluzioni sono: $\left\{R=\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right\}, \left\{R=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right\}$. Si ottiene quindi, scartando la impossibile soluzione negativa,

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2} = 0.618\,03....$$

Questo numero è detto **sezione aurea** e rappresenta il modo di dividere un segmento di lunghezza unitaria in una parte **media proporzionale** tra l'intero segmento e la parte restante: $1 : R = R : (1 - R)$. Questo rapporto gioca un ruolo fondamentale nella storia dell'arte ed era già conosciuto dai greci. Altre osservazioni sui numeri di Fibonacci e la sezione aurea saranno esposte a lezione.

La relazione che definisce la progressione di Fibonacci è un esempio di relazione di ricorrenza**.** In generale una **relazione di ricorrenza lineare di ordine** k è una espressione della forma:

$$a_k u_{n+k} + a_{k-1} u_{n+k-1} + ... + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = f(n)$$

Dove a_i è un numero reale per $i = 0, 1.....k$, $a_k \neq 0$ e $f(n)$ è una funzione reale del numero intero n. Quando $f(n) = 0$ la relazione è detta **omogenea**, altrimenti è detta **inomogenea**.

Consideriamo la relazione $u_{n+1} - 2u_n = 0$. E' una relazione di ricorrenza lineare omogenea di **ordine** 1. Se supponiamo $u_0 = 1$, otteniamo $u_1 = 2$, $u_2 = 2^2$... è facile mostrare che $u_n = 2^n$. Si noti che per risolverla è necessario un valore iniziale. La più generale relazione di questo tipo si scrive:

$$au_{n+1} + bu_n = 0$$

La cui soluzione è, ovviamente, $u_n = \alpha^n A$ dove $\alpha = -b/a$ e $A = u_0$.

Studiamo ora le relazioni lineari e omogenee di **ordine** 2 la cui forma generale è:

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

Non consideriamo la soluzione banale $u_n = 0$ per tutti gli n. Supponiamo (seguendo l'insegnamento del caso precedente) che la soluzione cercata sia della forma $u_n = \alpha^n A$ con $A \neq 0$ Allora deve essere:

$$a\alpha^{n+2}A + b\alpha^{n+1}A + c\alpha^n A = 0$$

Quindi si ottiene (dividendo per un u_n diverso da zero, che esiste per ipotesi) $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$. Ciò significa che α deve essere soluzione della seguente equazione di secondo grado, detta **equazione ausiliaria**:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Rimandiamo lo continuazione dello studio delle relazioni di ordine 2 a dopo aver trattato in maggior dettaglio le equazioni di secondo grado e i numeri complessi, e limitiamoci a esaminare il caso della relazione di Fibonacci: $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ $(n \geq 2)$ che riscriviamo:

$$u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0 \text{ per } n \geq 0 \text{ con } u_0 = 1 \text{ e } u_1 = 1$$

L'equazione ausiliaria è $x^2 - x - 1 = 0$, le cui soluzioni sono:

$$\left\{\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right\}, \left\{\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right\}$$

Se supponiamo $u_0 = 1$ e $u_1 = 1$ (servono due condizioni iniziali) allora la soluzione generale è:

$$u_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

Con A e B determinati dalle condizioni:

$$\begin{array}{c} u_0 = 1 = A + B \\ u_1 = 1 = A\alpha + B\beta \end{array}$$

Che, risolte, danno:

$$\begin{array}{c} B = \frac{\beta-1}{\beta-\alpha} = \frac{-\alpha}{\beta-\alpha} \\ A = \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\beta}{\beta-\alpha} \end{array}$$

Concludendo, nel caso dei numeri di Fibonacci, si ha:

$$u_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$$

Notare il risultato "apparentemente sorprendente":

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$ è un numero **intero** per ogni n.

OSSERVAZIONI SUI NUMERI DECIMALI.

I **numeri decimali** si dividono in **terminanti** (se possono essere scritti esattamente con un numero finito di cifre significative) e **non terminanti**, che a loro volta possono essere **periodici** e **non perodici**, questi ultimi sono detti anche **irrazionali (**i primi due tipi, i terminanti e i periodici, sono detti anche **razionali)**. Esempi di numeri irrazionali sono $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,π, R. Una frazione del tipo $\frac{1}{n}$ ha una espansione decimale terminante se e solo se gli unici fattori primi di n sono 2 e 5. Lo stesso vale per frazioni irriducibili di tipo $\frac{m}{n}$. Si usa indicare il periodo di un decimale periodico con una linea: $\frac{1}{9} = 0.111111.... = 0.\bar{1}$ Questo numero può essere scritto $\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + ...$ Questa è una **progressione geometrica** di primo termine $\frac{1}{10}$ e ragione $\frac{1}{10}$ per cui, come deve essere, la sua somma infinita è proprio $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{1}{9}$. Questo schema di calcolo è utile per trovare una frazione che rappresenti un dato decimale periodico. Consideriamo $\frac{1}{9} = 0.\overline{1}$, $\frac{1}{99} = 0.\overline{01}$, $\frac{1}{999} = 0.\overline{001}$, ... allora, ad esempio:

$$0.\overline{234} = 234 \times 0.\overline{001} = \frac{234}{999} = \frac{26}{111}$$

E' vero anche il viceversa: ogni frazione rappresenta un decimale terminante o periodico, infatti basta considerare le frazioni del tipo $\frac{1}{n}$ già visto sopra. Cosa si può dire circa la **lunghezza del periodo** di un numero periodico? Ad esempio $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ ha lunghezza 6. In generale, se consideriamo $\frac{1}{n}$ con n **primo** la lunghezza del periodo è sempre un divisore di $n-1$, mentre se n **non è primo,** è un divisore di $q-1$ dove q è un fattore primo di n. *C'è un teorema che dice: la lunghezza del periodo di $\frac{1}{n}$ è il più piccolo k per cui il* numero 999...9 (k volte 9) *è divisibile per n.* Ad esempio, $\frac{1}{19}$ ha periodo 18, **ma come facciamo a trovarlo con un display da meno di 18 cifre?**

Ecco un **algoritmo** per trovare periodi arbitrariamente lunghi con display da k cifre:

Consideriamo $\frac{m}{n}$ con $m < n$.
Passo 1: poniamo $r_1 = m, i = 1$ e scriviamo il numero 0.
Passo 2: calcoliamo $r_i/n = 0.abcdefgh$ fino alla k-esima cifra decimale e scriviamo $abcdefgh$ dopo il *numero fin qui ottenuto*.
Passo 3: calcoliamo $r_i - n \times 0.abcdefgh = r_{i+1} \times 10^{-k}$
Passo 4: se $ik \geq n-1$ il periodo è il *numero ottenuto*, altrimenti $i \to i+1$ e si va al passo 2.

Esempio: $\frac{1}{19}$ con un display da 6 cifre:

$1/19 = 0.052631$, *il numero fin qui ottenuto è* 0.052631
$1 - 19 \times 0.052631 = 11 \times 10^{-6}$
$11/19 = 0.578947$, *il numero fin qui ottenuto è* 0.052631578947
$11 - 19 \times 0.578947 = 7 \times 10^{-6}$
$7/19 = 0.368421$, *il numero fin qui ottenuto è* 0.052631578947368421
$ik = 18 \geq 18$ quindi $1/19 = 0.\overline{052631578947368421}$

Esempio: $\frac{1}{23} = 0.\overline{0434782608695652173913}$

SOMME NOTEVOLI E DIMOSTRAZIONI PER INDUZIONE.

Trattando le serie appaiono spesso alcune notevoli formule di calcolo:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Per dimostrare formule di questo tipo riguardo i numeri interi, e altre che vedremo in seguito, si usa un potente mezzo di dimostrazione, detto **prova per induzione.**

Sia $P(n)$ una affermazione riguardo il numero n, questa affermazione **è vera per tutti gli interi positivi** se:

1) $P(1)$ è vera.

2) $P(k)$ vera implica $P(k+1)$ vera.

Infatti se $P(1)$ è vera, il punto 2) implica che è vera $P(2)$; ancora lo stesso punto implica che $P(3)$ è vera e così via.

Osservazioni utili:

Il punto 1) può essere sostituito da : $P(a)$ è vera per un certo numero intero a; in questo caso $P(n)$ risulta **vera per tutti gli interi** $\geq a$.

Il punto 2) può essere sostituito da 2) bis : $P(k)$ vera per tutti i $k < m$ implica $P(m)$ vera.

Ad esempio sia $P(n)$ l'affermazione che $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Allora $P(1)$ è l'affermazione, ovviamente vera, che $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Occorre ora provare che $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Se assumiamo vera $P(k)$ si ha:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ma

$$\sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i$$

per cui,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

che è proprio l'affermazione $P(k+1)$ e quindi la formula $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ risulta vera per tutti gli n.

ALTRI ESEMPI DI INDUZIONE

a) Sia $P(n)$ l'affermazione che **dati** a **e** b **interi, e** n **un intero** > 0, **allora** $a - b$ **divide** $a^n - b^n$.

Ovviamente $P(1)$ è vera; ora osserviamo che:

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^k(a - b) + b(a^k - b^k)$$

Per cui **se** $P(k)$ è vera, e cioè $a-b$ divide $a^k - b^k$, è immediato osservare che **allora** $a-b$ divide anche $a^{k+1} - b^{k+1}$(infatti, in virtù della formula precedente, questo termine è la somma di due termini ciascuno dei quali è divisibile per $a - b$). **Ne risulta che** $P(n)$ **è sempre vera.**

b) Sia $P(n)$ l'affermazione che **dati** a **e** b **interi, e** n **un intero dispari** > 0, **allora** $a + b$ **divide** $a^n + b^n$.

(Questa affermazione riguarda solo gli interi dispari, e non tutti gli interi positivi; il metodo di induzione va così modificato:

Sia $P(n)$ una affermazione riguardo il numero **dispari** n, questa affermazione **è vera per tutti gli interi dispari** se:

1) $P(1)$ è vera.

2) bis $P(k)$ vera per tutti i k dispari $< n$ implica $P(n)$ vera.

Infatti se $P(1)$ è vera, il punto 2) bis implica che è vera $P(3)$; ancora lo stesso punto implica che $P(5)$ è vera e così via).

Ovviamente $P(1)$ è vera; ora osserviamo che:

$$a^n + b^n = a^{n-1}(a + b) - b(a^{n-1} - b^{n-1})$$

Se n è dispari, allora $n - 1 = 2m$ e quindi

$$a^n + b^n = a^{n-1}(a + b) + b(a^{n-1} - b^{n-1}) = a^{n-1}(a + b) + b(a^m + b^m)(a^m - b^m)$$

Se ora m è **dispari** abbiamo finito, perchè $m < n$ e quindi $a^m + b^m$ per ipotesi è divisibile per $a + b$. Se invece m è **pari**, si ottiene $m = 2r$ e quindi:

$$a^n + b^n = a^{n-1}(a + b) + b(a^m + b^m)(a^r + b^r)(a^r - b^r)$$

Se ora r è **dispari** abbiamo finito, perchè $r < m < n$ e quindi $a^r + b^r$ per ipotesi è divisibile per $a + b$. Se invece r è **pari**, si ottiene $r = 2l$ e si procede nello stesso modo. Osservando che $l < r < m < n$ si vede che il procedimento si deve arrestare a un numero dispari (nel peggiore dei casi 1) perchè n è un numero positivo e il piu piccolo numero positivo è 1.

Esempio $3^{27} + 2^{27} = 7625\,731\,702\,715$ risulta divisibile per $3 + 2 = 5$.

c) **Se** $2^n + 1$ **è primo, allora** n **è una potenza di due.**

Infatti n deve essere pari, altrimenti (per il punto b) $2^n + 1$ sarebbe divisibile per $2 + 1 = 3$. Quindi $n = 2k$, $k < n$, e anche k deve essere pari (per lo stesso motivo di prima $2^n + 1 = 2^{2k} + 1 = 4^k + 1$ sarebbe divisibile per $4 + 1 = 5$, quindi $k = 2r$ con $r < k < n$. Il ragionamento termina come prima con 1 e quindi $n = 2 \times 2 \times 2 \times ..... \times 2 \times 1$

Notate che il viceversa non è vero: $2^5 = 32$ ma $2^{32} + 1 = 641 \times 6700\,417$ non è primo.