TEOREMA

TEORIA DEI SISTEMI LINEARI

1) Un **sistema lineare** di m equazioni ed n incognite è un insieme di equazioni della forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) sono le **incognite**, $b_1, ..., b_m \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) sono i **termini noti** e $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) sono i **coefficienti**.

Si può anche scrivere:

$$Ax = b,$$

dove A è la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

x e b sono i vettori

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

2) Ci chiediamo tre cose in successione:
a) Il sistema ammette soluzioni? (si dice anche: il sistema è **compatibile**?)
b) Quante soluzioni ci sono?
c) Quali sono?

Per rispondere ad a), è utile considerare la matrice A', detta *matrice completa*, ottenuta aggiungendo ad A la colonna dei termini noti:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Allora, se il sistema ammette x come soluzione, vuol dire che la colonna

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

è combinazione lineare (con coefficienti x_i) delle colonne della matrice A. Infatti, il sistema si può scrivere nel modo seguente:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Quindi necessariamente A e A' devono avere lo stesso rango r (ricordare che il rango è il numero di colonne linearmente indipendenti). Viceversa, se A e A' hanno lo stesso rango, vuol dire che la colonna dei b_i è combinazione lineare delle altre e quindi il sistema ammette soluzione. In altre parole, $b \in \operatorname{Im} A$ (=immagine di A), quindi:

Un sistema è risolubile se e solo se rango$(A) =$ **rango**$(A') = r$.

Per rispondere a b), consideriamo prima il caso omogeneo, cioè il caso in cui b è il vettore nullo:

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, ovviamente, rango$(A) =$ rango$(A') = r$, per cui:

Un sistema omogeneo è sempre risolubile ($x = 0$ è sempre soluzione).

Indichiamo con $\ker A$ l'insieme degli x di $\mathbb{R}^n$ tali che $Ax = 0$ e con $\operatorname{Im} A$ l'insieme degli y di $\mathbb{R}^m$ tali che esiste un x di $\mathbb{R}^n$ per cui $Ax = y$. Si può verificare (e noi lo faremo dopo, studiando la teoria delle applicazioni lineari) che $\ker A$ e $\operatorname{Im} A$ sono due sottospazi rispettivamente di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Il sistema omogeneo si scrive $Ax = 0$, cioè $x \in \ker A$, e il *teorema delle dimensioni* ci dice che $\dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A = n$. Ma

$$\dim \ker A = (\text{dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo}) = n - r \ (\text{perchè rango}(A) = \dim \operatorname{Im} A).$$

Si usa dire che **il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni**.

Nel caso non omogeneo, basta osservare che, se x è una soluzione qualsiasi e x' è una soluzione del sistema omogeneo, allora

$$x' = x + x'$$

è ancora soluzione. Infatti

$$Ax' = Ax + Ax' = Ax = b,$$

perchè $Ax' = 0$. Viceversa, se x e x' sono due soluzioni distinte del sistema non omogeneo, allora

$$Ax = Ax' = b,$$

cioè $A(x - x') = 0$, cioè

$$x - x' \in \ker A = \{\text{soluzioni del sistema omogeneo}\}.$$

Quindi, **se un sistema di m equazioni ed n incognite è compatibile e di rango r, allora ammette ∞^{n-r} soluzioni (**che si ottengono sommando a una soluzione particolare del sistema dato **tutte** le soluzioni del corrispondente sistema omogeneo**).**

Per rispondere a c), se il sistema è compatibile e di rango r, si possono eliminare $m - r$ e equazioni e considerare come termini noti $n - r$ delle incognite, per arrivare ad un sistema quadrato di rango massimo, cioè ad un **sistema normale**, cioè un sistema di r equazioni in r incognite, del tipo

$$\boxed{Cy = d},$$

dove C è una sottomatrice quadrata $r \times r$ di A, con $\det C \neq 0$, y è una colonna contenente r delle incognite x_i e d è una colonna contenente r dei termini noti b_i sommati a combinazioni lineari delle altre $n - r$ incognite, la cui unica soluzione è $y = C^{-1}d$ (unica, perchè $r - r = 0$).

Tutte le soluzioni del sistema originario si ottengono quindi trattando le $n - r$ incognite che compaiono in d come parametri variabili.

ESEMPI.
1) Consideriamo il sistema di 3 equazioni e 3 incognite:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A')$ (perchè la 4^acolonna è uguale alla 1^a). Il sistema è compatibile con $\infty^{3-2} = \infty$ soluzioni.

Passiamo al sistema normale: guardando la matrice A, si vede che il minore

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha $\det \neq 0$, per cui il sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = -z \end{cases}$$

è normale di rango massimo:

$$C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \end{pmatrix},$$

dove

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z \\ -z \end{pmatrix}.$$

La soluzione del sistema è quindi

$$(1+z, -z, z)\,.$$

2) Sistema di 3 equazioni in 4 incognite:

$$\left\{ \begin{array}{c} z + 2t = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \\ 2x + 4y - z + 2t = 7 \end{array} \right.$$

Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che rango$(A) = 2$ e poichè b è somma delle colonne di A, anche rango$(A') = 2$. Il sistema è quindi compatibile ed essendo $n = 4, m = 3, r = 2$, si hanno $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. Eliminiamo una equazione e consideriamo 2 incognite come termini noti. Osserviamo che

det $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, per cui il sistema:

$$\begin{cases} z = 3 - 2t \\ 2x - 2z = 4 - 4y \end{cases}$$

è normale di rango massimo.

$$C \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = d$$

con

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ 4 - 4y \end{pmatrix},\ C^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = C^{-1}d = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ 4 - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2y + 2 - 2y \\ 3 - 2t \end{pmatrix}.$$

La soluzione generale del sistema è

$$(5 - 2y - 2t, y, 3 - 2t, t)\,.$$