Algebra (Informatica) — 20 Dicembre 2001

Si hanno a disposizione 36 punti. Con più di 19 punti si può fare l'orale o accettare il voto dello scritto (30 e lode per chi risolve tutti gli esercizi); con meno di 17 punti si deve rifare lo scritto; con 17, 18 o 19 punti si è ammessi all'orale.

1. **Risolvere, se possibile, le seguenti congruenze: (3 punti)**

$$\begin{aligned}&\mathbf{a)}\ 3x = 4 \bmod 5\\ &\mathbf{b)}\ -3x = 4 \bmod 5\\ &\mathbf{c)}\ 3x = 4 \bmod 6\end{aligned}$$

- Soluzione: **a)** $x = 3$ (infatti $3 \times 3 = 9$ e 9 diviso 5 ha resto 4), **b)** $x = 2$ (infatti $-3 \times 2 = -6$ e -6 diviso 5 ha **resto positivo** =4, perchè $-6 = -2 \times 5 + 4$) **c) non ha soluzione** perchè 3 divide 6 e quindi non esiste $3^{-1} \bmod 6$

2. **Risolvere in numeri interi, se possibile, le seguenti equazioni: (3 punti)**

$$\begin{aligned}&\mathbf{a)}\ 3x + 7y = 11\\ &\mathbf{b)}\ 3x - 7y = 11\\ &\mathbf{c)}\ 3x + 15y = 10\end{aligned}$$

- Soluzione: **a)** $\{x = -1 - 7N\ ,\ y = 2 + 3N\}$ **b)** $\{x = 6 + 7N\ ,\ y = 1 + 3N\}$, **c)** non ha soluzione perchè 3 divide 15 ma non divide10 (N è un intero qualsiasi).

3. **Trovare tutti i valori interi di x tali che, contemporaneamente : (4 punti)**

$$\begin{cases} 3x = 4 \bmod 5 \\ x = 4 \bmod 7 \end{cases}$$

- Soluzione: la prima relazione fornisce $x = 3 + 5N$, la seconda $x = 4 + 7M$ (con N e M interi positivi) per cui si ottiene $5N = 1 \bmod 7$ ovvero $N = 3 + 7k$ (con k intero positivo) , cioè $x = 18 + 35k$. In definitiva:

$$x = 18 \bmod 35$$

4. **Dimostrare che $n^5/5 + n^3/3 + 7n/15$ è un numero intero per ogni n. (6 punti)**

- Soluzione: basta dimostrare che

$$3n^5 + 5n^3 + 7n = 0 \bmod 15$$

Questo è equivalente ad avere, **contemporaneamente,**

$$\begin{aligned}3n^5 + 5n^3 + 7n &= 0 \bmod 3\\ 3n^5 + 5n^3 + 7n &= 0 \bmod 5\end{aligned}$$

Se n è multiplo di 15 non c'è niente da dimostrare.

Se n non è multiplo di 15, ci sono tre casi da studiare:

a) n **non è divisibile né per** 3 **né per** 5**.** Il teorema di Fermat ci dice in questo caso che $n^2 = 1 \bmod 3$ e $n^4 = 1 \bmod 5$; quindi $n^3 = n \bmod 3$ e $n^5 = n \bmod 5$. Si ottiene allora:

$$(3n^5 + 5n^3 + 7n) \bmod 3 = (5+7)n \bmod 3 = 12n \bmod 3 = 0$$
$$(3n^5 + 5n^3 + 7n) \bmod 5 = (3+7)n \bmod 3 = 10n \bmod 5 = 0$$

(abbiamo usato il fatto ovvio che: $3n^5 \bmod 3 = 0$ e che $5n^3 \bmod 5 = 0$)

b) n **non è divisibile per** 3 **ma è multiplo di** 5**.** Il teorema di Fermat ci dice in questo caso che $n^2 = 1 \bmod 3$ e quindi:

$$(3n^5 + 5n^3 + 7n) \bmod 3 = (5+7)n \bmod 3 = 12n \bmod 3 = 0$$
$$(3n^5 + 5n^3 + 7n) \bmod 5 = 0 \text{ (perchè } n \text{ è multiplo di 5)}$$

c) n **non è divisibile per** 5 **ma è multiplo di** 3**.** Il teorema di Fermat ci dice in questo caso che $n^4 = 1 \bmod 5$ e quindi:

$$(3n^5 + 5n^3 + 7n) \bmod 3 = 0 \text{ (perchè } n \text{ è multiplo di 3)}$$
$$(3n^5 + 5n^3 + 7n) \bmod 5 = (3+7)n \bmod 3 = 10n \bmod 5 = 0$$

5. **Risolvere, in campo complesso, l'equazione** $x^2 = i$ **(3 punti)**

- Soluzione: $i = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2$ per cui le due radici quadrate di i sono:

$$\alpha_1 = \cos \pi/4 + i \sin \pi/4 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{2}$$
$$\alpha_2 = \cos(\pi/4 + 2\pi/2) + i \sin(\pi/4 + 2\pi/2) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{2}$$

6. **Risolvere, in campo complesso, l'equazione** $x^3 - x + i\,(2x^2 - 2) = 0$ **(3 punti)**

- Soluzione: si vede subito che $x = 1$ è una radice. Inoltre:

$$\frac{x^3 - x + i\,(2x^2 - 2)}{x - 1} = x^2 + x + i(2x + 2)$$

Si vede ancora che $x = -1$ è una radice di $x^2 + x + i(2x + 2)$. Inoltre:

$$\frac{x^2 + x + i(2x + 2)}{x + 1} = x + 2i$$

Si vede che $x = -2i$ è una radice di $x + 2i$. Le tre soluzioni dell'equazione data sono quindi:

$$\{x = -2i\}\,, \{x = -1\}\,, \{x = 1\}$$

7. **Dimostrare che** $x = 1$ **è radice tripla del polinomio** $p(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ **(3 punti)**

- Soluzione: si può verificare subito che $x = 1$ è radice anche del polinomio derivato una volta

$$a(x) = \frac{dp(x)}{dx} = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1$$

e del polinomio derivato due volte

$$b(x) = \frac{da(x)}{dx} = 20x^3 - 12x^2 - 12x + 4$$

8. **Calcolare $(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2})^{100}$ (4 punti)**

- Soluzione: si vede subito che $(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2})^2 = -i$; quindi:

$$(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2})^{100} = (-i)^{50} = (i)^{50} = (i^2)^{25} = (-1)^{25} = -1$$

9. **Calcolare u_8 sapendo che $u_0 = 2/3$ e che $2u_{n+1} + 3u_n = 0$ (3 punti)**

- Soluzione: si può porre $u_n = u_0\alpha^n$ (dove α è la soluzione di $2\alpha+3 = 0$). Quindi:

$$u_8 = (3/2)^7 = \frac{2187}{128}$$

10. **Risolvere la seguente relazione di ricorrenza: (4 punti)**

$$\begin{gathered} u_{n+2} - 3u_n = 0 \\ u_0 = -1/\sqrt{3} \\ u_1 = 1 \end{gathered}$$

- Soluzione: l'equazione di secondo grado associata è $x^2 - 3 = 0$, con soluzioni

$$\left\{\alpha = \sqrt{3}\right\}, \left\{\beta = -\sqrt{3}\right\}$$

la soluzione generale è quindi: $u_n = A\sqrt{3}^n + B\left(-\sqrt{3}\right)^n$. Le costanti A e B si ottengono da:

$$\begin{gathered} u_0 = A + B = -1/\sqrt{3} \\ u_1 = A\sqrt{3} - B\sqrt{3} = 1 \end{gathered}$$

Da cui: $A = 0$ e $B = -1/\sqrt{3}$. In definitiva:

$$u_n = -1/\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}\right)^n$$