

Algebra (Informatica) — 22 giugno 2004

Con 18 o più punti si può fare l'orale o accettare il voto dello scritto (30 e lode per chi risolve tutti gli esercizi); con meno di 18 punti si deve rifare lo scritto.

1. **Risolvere, in Z_{17} , le seguenti equazioni:**

- a) $-x^2 = 8$ (3 punti)**
b) $x^2 = 8$ (3 punti)

Soluzione: **a)** basta osservare che $-8 \bmod 17 = 9$, per cui $x = 3$ e $x = -3 \bmod 17 = 14$ **b)** basta provare e si trova subito $5^2 \bmod 17 = 8$ per cui $x = 5$ e $x = -5 \bmod 17 = 12$

2. **Trovare le condizioni da porre sull'intero a perchè le seguenti equazioni abbiano soluzioni:**

- a) $5ax = 3 \bmod 7$ (4 punti)**
b) $5x = a \bmod 15$ (4 punti)

Soluzione: **a)** l'equazione ha soluzione se e solo se $5a$ e 7 sono primi fra loro, cioè se e solo se a non è multiplo di 7 . **b)** l'equazione ha soluzione se e solo se a è multiplo di 5 .

3. **Calcolare la parte reale del numero complesso $z = (1 + i)^{12} + (1 - i)^{12}$ (5 punti)** Soluzione: $(1 \pm i) = \sqrt{2} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right\}$ per cui basta applicare la formula di DeMoivre: $(1 \pm i)^{12} = (\sqrt{2})^{12} \left\{ \cos \frac{12\pi}{4} \pm i \sin \frac{12\pi}{4} \right\} = -64$

4. **Trovare la soluzione della seguente relazione di ricorrenza:**

$$\begin{cases} 5u_{n+1} + u_n = 0 \\ u_0 = 10 \end{cases}$$

(5 punti)

Soluzione: $5x + 1 = 0$, da cui $x = -\frac{1}{5}$

$$u_n = 10 \left(-\frac{1}{5} \right)^n$$

5. **Sia n un intero positivo, trovare il resto euclideo della divisione $1111^{17823} : 12$ (6 punti).**

Soluzione : $\varphi(12) = 4$, quindi basta calcolare $17823 \bmod 4 = 3$. A questo punto abbiamo $1111^{17823} = 1111^{4k} 1111^3$ e quindi, per il teorema di Eulero,

$$1111^{17823} \bmod 12 = 1111^3 \bmod 12 = 7^3 \bmod 12 = 7$$