Algebra (Informatica) — 23 settembre 2002

Con più di 19 punti si può fare l'orale o accettare il voto dello scritto (30 e lode per chi risolve tutti gli esercizi); con meno di 17 punti si deve rifare lo scritto; con 17, 18 o 19 punti si è ammessi all'orale.

1. **Risolvere, se possibile, le seguenti congruenze: (3 punti)**

   a) $21x = 4 \bmod 11$
   b) $4x = -11 \bmod 13$

   - Soluzione: **a)** $x = 4/21 \bmod 11 = 7$ (infatti $7 \times 21 = 147 =$ e 147 diviso 11 ha resto 4), **b)** $x = -11/4 \bmod 13 = 7$ (infatti $4 \times 7 = 28$, $28 \bmod 13 = 2$ e $-11 \bmod 13 = 2$.

2. **Risolvere in numeri interi le seguenti equazioni: (4 punti)**

   a) $13x + 11y = 15$
   b) $23x - 17y = 1$

   - Soluzione: **a)** $\{y = -1 - 13N, x = 2 + 11N\}$ **b)** $\{y = 4 + 23N_1, x = 3 + 17N_1\}$

3. **Trovare il più piccolo intero positivo che diviso per** 17 **dia resto** 3 **e diviso per** 23 **resto** 2 **(4 punti)**

   - Soluzione:

   $$\begin{cases} x = 3 \bmod 17 \\ x = 2 \bmod 23 \end{cases}$$

   La prima relazione fornisce $x = 3 + 17N$, la seconda $x = 2 + 23M$ (con N e M interi) per cui si ottiene $23M = 1 + 17N$ ovvero $M = 1/23 \bmod 17 = 3$ **(vedi l'esercizio 2b)** , cioè, sostituendo, $x = 71 + 23 \times 17k$ (con k intero); il più piccolo positivo è quindi 71.

4. **Dimostrare che l'espressione** $\frac{1}{13}\left(6n^{25} + 7n\right)$ **rappresenta un numero intero per ogni** n **intero. (5 punti)**

   - Soluzione: bisogna dimostrare che

   $$6n^{25} + 7n = 0 \bmod 13$$

Ci sono due casi da studiare:
1) n **è multiplo di** 13 : non c'è niente da dimostrare, il resto è ovviamente 0.
2) n **non è divisibile per** 13 **:** il piccolo teorema di Fermat ci dice in questo caso che $n^{12} = 1 \bmod 13$ e quindi, ragionando $\bmod 13$,

$$6n^{25} + 7n = n(6n^{24} + 7) = n\left[6\left(n^{12}\right)^2 + 7\right] = n(6 + 7) = 13n = 0$$

5. **Risolvere, in campo complesso, l'equazione** $x^8 + 8x^4 + 16 = 0$ **(5 punti)**

Soluzione: basta porre $x^4 = y$ e si trova $y^2+8y+16 = 0$, $y = -4$ con molteplicità uguale a 2 e quindi i valori di x sono le quattro radici quarte di -4, ciascuna con molteplicità uguale a 2, ovvero le **otto** soluzioni sono:

$$x_1 = x_2 = 1 + i, x_3 = x_4 = 1 - i, x_5 = x_6 = -1 + i, x_7 = x_8 = -1 - i$$

6. **Dimostrare che nessun numero intero elevato al quadrato e diviso per** 11 **può dare resto** 7. **(5 punti)**

   - Soluzione: si deve studiare la risolubilità dell'equazione:

$$x^2 = 7 \bmod 11$$

Si applica il criterio di Gauss: $7^{(11-1)/2} \bmod 11 = 10 = -1$: e quindi 7 non è un residuo quadratico modulo 11 e la congruenza non è risolubile.

7. **Calcolare** $\mathrm{Re}\{\frac{(1+i)^6}{i}\}$ **(4 punti)**

   - Soluzione: $(1 + i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ per cui $(1 + i)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 e^{6i\pi/4} = -8i$. Si ottiene quindi:

$$\mathrm{Re}\{\frac{(1+i)^6}{i}\} = -8$$

8. **Sia** u_n **una successione di numeri reali; calcolare** u_n **sapendo che: (4 punti)**

$$\begin{gathered} u_{n+2} + 8u_{n+1} + 4u_n = 0 \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 4 \end{gathered}$$

   - Soluzione: l'equazione di secondo grado associata è $x^2+8x+4 = 0$, con soluzioni reali e distinte:

$$\left\{\alpha = -4 + 2\sqrt{3}\right\}, \left\{\beta = -4 - 2\sqrt{3}\right\}$$

la soluzione generale è quindi: $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$. Le costanti A e B si ottengono da:

$$\begin{gathered} u_0 = A + B = 0 \\ u_1 = A\alpha + B\beta = 4 \end{gathered}$$

Da cui: $A = 1/\sqrt{3}$ e $B = -1/\sqrt{3}$. In definitiva:

$$u_n = 1/\sqrt{3}\left(-4 + 2\sqrt{3}\right)^n - 1/\sqrt{3}\left(-4 - 2\sqrt{3}\right)^n$$