Algebra (Informatica) — 27 giugno 2002

Con più di 19 punti si può fare l'orale o accettare il voto dello scritto (30 e lode per chi risolve tutti gli esercizi); con meno di 17 punti si deve rifare lo scritto; con 17, 18 o 19 punti si è ammessi all'orale.

1. **Risolvere, se possibile, le seguenti congruenze: (3 punti)**

   a) $22x = 4 \bmod 15$
   b) $2x = -11 \bmod 17$

   - Soluzione: **a)** $x = 7$ (infatti $7 \times 22 = 154$ e 154 diviso 15 ha resto 4), **b)** $x = 3$ (infatti $2 \times 3 = 6$ e $-11 \bmod 17 = 6$**.**

2. **Risolvere in numeri interi le seguenti equazioni: (4 punti)**

   a) $13x + 7y = 15$
   b) $23x - 15y = 11$

   - Soluzione: **a)** $\{y = -9 - 13N_1, x = 6 + 7N_1\}$ **b)** $\{y = 10 + 23N_1, x = 7 + 15N_1\}$

3. **Trovare tutti i numeri interi che divisi per** 13 **danno resto** 3 **e divisi per** 17 **danno resto** 2 **(4 punti)**

   - Soluzione:

   $$\begin{cases} x = 3 \bmod 13 \\ x = 2 \bmod 17 \end{cases}$$

   La prima relazione fornisce $x = 3 + 13N$, la seconda $x = 2 + 17M$ (con N e M interi) per cui si ottiene $17M = 1 + 13N$ ovvero $M = 1/17 \bmod 13 = 10$, cioè, sostituendo, $x = 172 + 13 \times 17k$ (con k intero).

4. **Dimostrare che tutti i numeri della forma** $3n^{20} + 8$ **(con** n **intero qualsiasi) divisi per** 11 **danno resto** 0 **oppure** 8 **(5 punti)**

   - Soluzione: bisogna dimostrare che

   $$3n^{20} + 8 = 0 \bmod 11 \text{ oppure } 8 \bmod 11$$

Ci sono due casi da studiare:
1) n **è multiplo di** 11 : non c'è niente da dimostrare, il resto è ovviamente 8.
2) n **non è divisibile per** 11 **:** il piccolo teorema di Fermat ci dice in questo caso che $n^{10} = 1 \bmod 11$ e quindi:

$$3n^{20} + 8 = 3(n^{10})^2 + 8 = 11 \bmod 11 = 0 \bmod 11$$

5. **Risolvere, in campo complesso, l'equazione** $x^8 - 8x^4 + 16 = 0$ **(4 punti)**

Soluzione: basta porre $x^4 = y$ e si trova $y^2 - 8y + 16 = 0$ cioè $y = 4$ con molteplicità uguale a 2 e quindi i valori di x sono le quattro radici quarte di 4, ciascuna con molteplicità uguale a 2, ovvero le **otto** soluzioni sono:

$$x_1 = x_2 = \sqrt{2}, x_3 = x_4 = -\sqrt{2}, x_5 = x_6 = i\sqrt{2}, x_7 = x_8 = -i\sqrt{2}$$

6. **Dimostrare che nessun numero intero elevato al quadrato e diviso per** 17 **può dare resto** 3. **(6 punti)**

    - Soluzione: si deve studiare la risolubilità dell'equazione:

$$x^2 = 3 \bmod 17$$

Si applica il criterio di Gauss: $3^{(17-1)/2} \bmod 17 = 6561 \bmod 17 = 16 = -1$: e quindi 3 non è un residuo quadratico modulo 17 e la congruenza non è risolubile.

7. **Calcolare** $\mathrm{Re}\{i(1+i)^{10}\}$ **(4 punti)**

    - Soluzione: $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ per cui $(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10} e^{10i\pi/4} = 32i$. Si ottiene quindi:

$$\mathrm{Re}\{i(1+i)^{10}\} = -32$$

8. **Sia** u_n **una successione di numeri reali; calcolare** u_{10} **sapendo che: (5 punti)**

$$\begin{gathered} u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n = 0 \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 2 \end{gathered}$$

    - Soluzione: l'equazione di secondo grado associata è $x^2 + 2x + 2 = 0$, con soluzioni complesse coniugate:

$$\{\alpha = -1 - i\}, \{\beta = -1 + i\}$$

la soluzione generale è quindi: $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$. Le costanti A e B si ottengono da:

$$\begin{gathered} u_0 = A + B = 0 \\ u_1 = A\alpha + B\beta = 2 \end{gathered}$$

Da cui: $A = i$ e $B = -i$. In definitiva:

$$u_n = i\,(-1-i)^n - i\,(-1+i)^n = 2\,\mathrm{Re}\{i\,(-1-i)^n\}$$

Osserviamo ora che $(-1-i)^{10} = (1+i)^{10}$ per cui l'esercizio n.7 fornisce subito:

$$u_{10} = 2\,\mathrm{Re}\left\{i(-1-i)^{10}\right\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{i(1+i)^{10}\right\} = 2 \times (-32) = -64$$

.