Algebra (Informatica) — 9 gennaio 2003

Con più di 18 punti si può fare l'orale o accettare il voto dello scritto (30 e lode per chi risolve tutti gli esercizi); con meno di 17 punti si deve rifare lo scritto; con 17 o 18 punti si è ammessi all'orale.

1. **Trovare il minimo intero positivo x tale che: (4 punti)**

$$\textbf{a)}\ 21x = 7 \bmod 23$$
$$\textbf{b)}\ 4x = -11 \bmod 19$$

- Soluzione: **a)** $x = 7/21 \bmod 23 = 8$, **b)** $x = -11/4 \bmod 19 = 2$

2. **Risolvere in numeri interi (se possibile) le seguenti equazioni: (4 punti)**

$$\textbf{a)}\ 19x - 11y = 7$$
$$\textbf{b)}\ 21x - 141y = 17$$

- Soluzione: **a)** $\{x = 5 + 11N_1, y = 8 + 19N_1\}$ **b)** Non ammette soluzione perchè 17 non è divisibile per 3

3. **Trovare il più piccolo intero positivo che diviso per** 19 **dia resto** 6 **e diviso per** 23 **resto** 11 **(4 punti)**

- Soluzione:

$$\begin{cases} x = 6 \bmod 19 \\ x = 11 \bmod 23 \end{cases}$$

La prima relazione fornisce $x = 6 + 19N$, la seconda $x = 11 + 23M$ (con N e M interi) per cui si ottiene $19N = 5 + 23M$ ovvero $N = 5/19 \bmod 23 = 16$ cioè, sostituendo, $x = 310 + 23 \times 19k$ (con k intero); il più piccolo numero intero positivo di questo tipo è quindi 310.

4. **Dimostrare che l'espressione** $(11n^{72} + 3n^{18})$ **per ogni** n **intero è divisibile per** 14**. (5 punti)**

- Soluzione: bisogna dimostrare che

$$11n^{72} + 3n^{18} = 0 \bmod 14$$

1) n **è multiplo di** 14 : non c'è niente da dimostrare, il resto è ovviamente 0.
2) n **non è divisibile per** 14 **:** Il teorema di Eulero dice che $x^{\varphi(14)} \bmod 14 = 1$ dove $\varphi(14) = 6$ e quindi, ragionando $\bmod 14$,

$$11n^{72} + 3n^{18} = 11\left(n^6\right)^{12} + 3\left(n^6\right)^3 = 14 = 0$$

5. **Risolvere, in campo complesso, l'equazione** $x^6 + 50x^3 + 225 = 0$. **(5 punti)**

Soluzione: basta porre $x^3 = y$ e si trova $y^2 + 50y + 225 = 0$, le cui soluzioni sono: $\{y = -45\}, \{y = -5\}$. Quindi i valori di x sono le radici terze di -5 e di -45. Ovvero le **sei** soluzioni sono:

$$\left\{x = -\sqrt[3]{5}\right\}, \left\{x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\sqrt[3]{5}\right\}, \left\{x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\sqrt[3]{5}\right\},$$
$$\left\{x = -\sqrt[3]{45}\right\}, \left\{x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{45} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\sqrt[3]{45}\right\}, \left\{x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{45} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\sqrt[3]{45}\right\}$$

6. **Calcolare, motivando tutti i passaggi,** $\mathrm{Re}\left[(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2})^{14}\right]$ **(4 punti)**

   - Soluzione: $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2} = e^{i\pi/4}$: per cui $(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2})^{14} = e^{14i\pi/4} = -i$

$$\mathrm{Re}(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2})^{14} = 0$$

7. **Sia u_n una successione di numeri reali; calcolare $\sum_{n=0}^{n=100}(-1)^n u_n$ sapendo che: (5 punti)**

$$u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$$
$$u_0 = 1$$
$$u_1 = 2$$

   - Soluzione: l'equazione di secondo grado associata è $x^2+2x+1 = 0$, con soluzioni reali e coincidenti:

$$\{\alpha = -1\},$$

la soluzione generale è quindi: $u_n = A\alpha^n + Bn\alpha^n$. Le costanti A e B si ottengono da:

$$u_0 = A = 1$$
$$u_1 = -A - B = 2$$

Da cui: $A = 1$ e $B = -3$. In definitiva:

$$\{u_n = (-3n)(-1)^n + (-1)^n\}$$

Si ottiene quindi:

$$\sum_{n=0}^{n=100} (-1)^n \left[(-3n)(-1)^n + (-1)^n\right] = \sum_{n=0}^{n=100} (-3n + 1) = \frac{-3 \times 100 \times 101}{2} + 1 = -15\,149$$