# Soluzioni dello scritto del 12 settembre 2000

## Esercizio 1.

**(a)** La matrice è : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ il cui rango è **due**. L'immagine, **di dimensione due** è generata da due colonne indipendenti (le prime due) mentre il nucleo, **di dimensione uno**, è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ che è proprio il vettore $v$ del punto b).

**(b)** Ovviamente, per quanto detto sopra, $f^{100}(v) = 0$. $f^{-1}(v)$ si trova imponendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questo sistema **non ammette soluzione**, per cui $f^{-1}(v) = \emptyset$ (l'insieme vuoto)

## Esercizio 2.

Si trova subito che $A^2 = I$ per cui $A^{37} = A$.

## Esercizio 3.

La matrice è a blocchi per cui si studiano i due blocchi separatamente. Il primo blocco è banale, è diagonale e **2 è autovalore**. Il secondo blocco è $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ed ha **rango uguale a 1**, quindi la dimensione del nucleo è **tre** e **zero è un autovalore di molteplicità geometrica tre.** Un altro autovalore si trova subito:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per cui **8 è un altro autovalore**.

La matrice **è diagonalizzabile** perchè gli autovalori 2 e 8 sono di molteplicità algebrica uguale a 1 e quindi regolari, mentre l'autovalore 0 ha molteplicità geometrica uguale a 3 come detto sopra e algebrica pure 3, perchè la matrice è di dimensione 5 (e quindi la somma delle molteplicità algebriche deve fare 5) per cui $5 - 2 = 3$.

## Esercizio 4.

Il **nucleo** è il polinomio nullo $v = 0$ e **l'immagine** è lo spazio dei polinomi di grado almeno uno e al più quattro, infatti integrando una costante si ottiene un polinomio di grado uno. Questo spazio è generato da $\{x, x^2, x^3, x^4\}$ ed è di dimensione quattro.

Nelle basi assegnate l'applicazione è data da:

$$\begin{aligned} f(1) &= x \\ f(x) &= x^2/2 \\ f(x^2) &= x^3/3 \\ f(x^3) &= x^4/4 \end{aligned}$$

Per cui la matrice è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che, in accordo col punto a), il rango è 4.