Soluzioni dello scritto del 17 giugno 1999

Esercizio 1.

$\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, base dell'immagine: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, base del nucleo: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{pmatrix} 1 & i & i & 0 \\ -i & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, rango$= 3 \Longrightarrow$ impossibile!$\Longrightarrow f^{-1}(v) = \emptyset$

$\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ cioè $f^{-1}(w) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -y \end{pmatrix} \text{ con } y \text{ reale.} \right\}$

Esercizio 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

determinante $= k - 1$. Autovalori: $1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(5-4k)}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(5-4k)}$, **polinomio caratteristico:** $-X^3 - Xk + 2X + k - 1$.

Se le soluzioni sono **reali** (cioè $k \leq 5/4$) **e distinte** la matrice **è diagonalizzabile.**

Un caso da discutere è:
$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(5-4k)} = 1, \Longrightarrow \{k = -1\}$ ma la matrice è **simmetrica** e quindi **diagonalizzabile.**

Un altro caso da discutere è quando il **discriminante** è nullo, cioè $k = 5/4$. Allora la matrice diventa

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5/4 & 0 \end{pmatrix}$ con autovettori $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -\frac{1}{2}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$,e autovalori: $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

e quindi la matrice **non è diagonalizzabile** perchè $-1/2$ **non è regolare**.

Esercizio 3.

L'unico autovalore possibile di A è lo **zero**. **Se** A è **diagonalizzabile** (e $n \times n$), lo zero deve essere un autovalore regolare e, essendo l'unico autovalore, la dimensione del suo autospazio deve essere n. Questo vuole dire che il nucleo di A ha dimensione n, cioè il **rango** di A è **zero** (per il teorema delle dimensioni).

Esercizio 4.

Per ottenere una forma diagonale, basta osservare che **la matrice data ha rango 1**. Allora la dimensione del nucleo è 4. Questo significa che **zero è autovalore** con molteplicità ≥ 4. **Un altro** autovalore è 25 con autovettore $(1, 1, 1, 1, 1)$ e molteplicità ≥ 1.

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix} = 25 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Siccome la **somma delle molteplicità** deve essere 5, si scopre che **non ci possono essere altri autovalori** e che la molteplicità dell'autovalore zero è 4, e quella dell'autovalore 25 è 1 .

(Con un pò di conti si poteva trovare il medesimo risultato calcolando il polinomio caratteristico che è: $-X^5 + 25X^4$*).*

Siccome la dimensione dell'autospazio dell'autovalore zero è 4, e la dimensione dell'autospazio dell'autovalore 25 è 1, **tutti gli autovalori sono regolari e la matrice è diagonalizzabile.**

Una forma diagonale è quindi :(le matrici diagonalizzanti **non** erano richieste:)

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & \frac{1}{5} & -3 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & - \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio n.5

E' un sistema di 4 equazioni e 4 incognite.

La matrice del sistema è : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$ che ha rango 3 per $k \neq 1$ e rango 2 per $k = 1$.

La matrice completa è: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & k \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k-1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 3 per $k = 0$ e $k = 1$ e rango 4 negli altri casi.

Allora: per $k = 0$ il sistema **è risolubile** con ∞^1 soluzioni, mentre per $k \neq 0$ **non è risolubile.**

Esercizio 6.

$$v = (1,1,1) \quad w = (-1,0,1) \quad u = (0,1,2)$$

$U = \mathit{span}\,\{v,u\}$, $V = \mathit{span}\,\{v,w,u\}$. Ma $U = V$ perchè $w = u - v$.

E, inoltre, $\dim U = 2$ perchè u e v sono **indipendenti.**

Allora $U \cap V = U$ e $U + V = U$ e quindi tutti e due **hanno dimensione** 2.

(Si noti che, infatti, $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 2 = 2$)

Per trovare la retta basta trovare un vettore **ortogonale** a v e a w : per esempio $(1,-2,1)$.

La **retta** è, allora, $r = (x,y,z) = (0,1,2) + t(1,-2.1)$ con t parametro reale.